Lista de Exercícios 3

- 1 Resolva os seguintes problemas de programação linear usando o método simplex

$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito a} \\ (a) \quad 3x_1 + 5x_2 &\leq 8, \\ 2x_1 + 7x_2 &\leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Max } z &= x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeito a} \\ (b) \quad 2x_1 - 5x_2 + x_3 &\leq 3, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$
--	--

- 2 Considere o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= -2x_1 - x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 - x_2 &\leq 2, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Converta o problema para a forma padrão e construa uma solução básica viável com $(x_1, x_2) = (0, 0)$.
- (b) Obter a solução do problema utilizando o método simplex, começando com a solução básica viável da parte (a).
- (c) Desenhe uma representação gráfica do problema em termos das variáveis originais x_1, x_2 , e indique o caminho seguido pelo algoritmo simplex.
- 3 Considere o seguinte quadro, que surgiu na resolução de um problema de programação linear pelo método simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
12	0	-5	-3	0	0	3
20	1	5	2	0	0	3
6	0	2	4	1	0	-4
12	0	2	-1	0	1	3

- (a) Identifique a solução básica viável e as variáveis básicas neste quadro.

- (b) Calcule o próximo quadro usando o método simplex.
- (c) Identifique a solução básica viável e as variáveis básicas no quadro em (b).

4 Considere o problema de minimizar $c^T x$ sobre o poliedro P . Prove que:

- (a) Uma solução viável x é ótima se, e somente se, $c^T d \geq 0$ para cada direção viável d em x .
- (b) Uma solução viável x é uma solução ótima única se $c^T d > 0$ para cada direção viável não nula d em x .

5 Seja x um elemento do poliedro na forma padrão $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. Prove que um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção viável em x se, e somente se, $Ad = 0$ e $d_i \geq 0$ para cada i tal que $x_i = 0$.

6 Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1, x \geq 0\}$ e considere o vetor $x = (0, 0, 1)$. Encontre o conjunto de direções viáveis em x .

7 Dado $u \in \mathbb{R}^m$ com u_l diferente de zero, encontre uma matriz $m \times m$ Q tal que o resultado de pré-multiplicar uma matriz $m \times m$ A por Q corresponde às seguintes operações elementares sobre as linhas de A :

- Substituir a linha i pela linha i menos $\frac{u_i}{u_l}$ vezes a linha l , para $i \neq l$.
- Dividir a linha l por u_l .

Verifique que Q é invertível.

8 Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Adicione variáveis artificiais, quando necessário, e anote o problema auxiliar para a Fase 1 do método de 2 fases.

- (b) Resolva o problema auxiliar em (a) e determine uma solução básica viável para o problema de programação linear dado.
- (c) Prossiga para a Fase 2 para resolver o problema de programação linear fornecido.

- 9 Resolva o seguinte problema de programação linear usando o método big-M.

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

- 10 Resolva o seguinte problema de programação linear usando o método de duas fases.

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 2, \\ 4x_2 + 9x_3 &= 5, \\ -3x_3 - x_4 &= -1, \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$