Lista de Exercícios 2

Convexidade

Definição: Uma função $f : C \to \mathbb{R}$, onde C é uma conjunto convexo, é convexa se

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),$$

para todo $x, y \in C$ e $\alpha \in [0,1]$.
Definição: Uma função $f : C \to \mathbb{R}$, onde C é uma conjunto convexo, é côncava se

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

para todo $x, y \in C$ e $\alpha \in [0,1]$.
Definição: Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, é dita linear se para quaiquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e escalares α, β temos

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Definição: Uma função $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, é dita afim se existe uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$A(x) = f(x) + b.$$

$\boxed{1}$ Suponha que a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é côncava e convexa. Prove que f é uma função afim.

$\boxed{2}$ Considere a região viável de um problema de programação linear dada pelo sequinte conjunto $V = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. Prove que V é convexo.

$\boxed{3}$ Suponha que $f_1, \ldots, f_m$ são funções convexas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ e considere a função $f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$. Mostre que se cada f_i é convexa, então f é convexa.

$\boxed{4}$ Seja C um conjunto convexo e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que $\alpha_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Se $x_1, \ldots, x_k \in C$ então

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in C.$$

Dica: Use indução na quantidade de termos da combinação convexa.

$\boxed{5}$ Mostre que o fecho convexo de um número finito de vetores é convexo.

Algebra Linear

$\boxed{6}$ Determine quais dos conjuntos abaixo são LI

(a) $\{(1, 1, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

(b) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 2)\}$.

(c) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 0, 5)\}$.

$\boxed{7}$ Suponha que β seja um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ que formam uma base e y um vetor em $\mathbb{R}^n$ arbitrário. Desejamos expressar y como um linear combinação dos vetores dessa base. Como isso pode ser feito?

$\boxed{8}$ Mostre que o conjunto de vetores $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$, $k \geq 2$, é linearmente dependente se e somente se um dos vetores v_j é uma combinação linear dos outros vetores de S.

$\boxed{9}$ Seja $S = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$ com A uma matriz dada. Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Poliedros e soluções básicas

$\boxed{10}$ Para cada um dos seguintes conjuntos, determine se é um poliedro.

(a) O conjunto de todos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo as restrições $x \cos\theta + y \sin\theta \leq 1$ para todo $\theta \in [0, \pi/2]$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(b) O conjunto de todos $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo a restrição $x^2 - 8x + 15 \leq 0$.

(c) O conjunto vazio.

$\boxed{11}$ Sejam P e Q poliedros em $\mathbb{R}^n$. Seja $P + Q = \{x + y | x \in P, y \in Q\}$.

(a) Mostre que $P + Q$ é um poliedro.

(b) Mostre que cada ponto extremo de $P + Q$ é a soma de um ponto extremo de P e um ponto extremo de Q.

$\boxed{12}$ Considere o poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, com A e b definidos abaixo. Calcule uma solução básica. Deixe claro todos os passos usados e justifique se a solução encontrada é viável.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Encontre todas as soluções básicas (são três possibilidades).

(c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{13}$ Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{llllll}
\text{Max } z = -6x_1 - 6x_2 & & & + 3x_4 + 5x_5 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & \\
2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & +5x_5 & = 6 \\
2x_1 & & +3x_3 & -x_4 & & = 6 \\
2x_1 & +2x_2 & & & -2x_5 & = 6 \\
 & & & & x_i & \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5.
\end{array}$$

(a) Existe uma solução básica com x_1, x_2 e x_3 na base?

(b) Encontre uma solução básica viável com x_1, x_3 e x_5 na base.

(c) Encontre uma solução básica viável com x_2, x_3 e x_4 na base.

$\boxed{14}$ Sabemos que cada problema de programação linear pode ser convertido em um problema equivalente na forma padrão. Também sabemos que poliedros não vazios na forma padrão têm pelo menos um ponto extremo. Estamos tentados a concluir que cada poliedro não vazio tem pelo menos um ponto extremo. Explicar o que há de errado com esse argumento.

$\boxed{15}$ (Teorema de Carathéodory) Seja $A_1, \ldots, A_n$ uma coleção de vetores em $\mathbb{R}^m$.

(a) Seja

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}$$

Mostre que qualquer elemento de C pode ser expresso na forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, com $\lambda_i \geq 0$ e com no máximo m dos coeficientes A_i não nulos.

Dica: Considere o poliedro

$$\Gamma = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$

(b) Seja P o fecho convexo dos vetores A_i

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$

Mostre que qualquer elemento de P pode ser expresso na forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, onde $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ com no máximo m+1 dos coeficientes λ_i não nulos.