MAP0151 - Cálculo Numérico e Aplicações

1º Semestre de 2017

2ª Lista

Teorema 1 *(Teorema do Valor Médio)*

Seja $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ derivável. Sejam $x, y \in [a,b]$. Então existe η entre x e y tal que $g(x) - g(y) = g'(\eta)(x-y)$.

Nota: η no teorema acima depende de x e y.

Questão 1 Queremos usar o Método das Tangentes para aproximar um zero positivo $\overline{x}$ da função $f(x) = x^4 + x^3 - 3$.

(a) Determine um intervalo $[a,b] \subset \mathbf{R}^+$ que contenha exatamente um zero de f. (Justifique!)

(b) Escolha $x_0 = a$ e faça 2 iterações do Método das Tangentes para aproximar $\overline{x}$, se não "cair fora" de $[a,b]$.

(b) Escolha $x_0 = b$ e faça 2 iterações do Método das Tangentes para aproximar $\overline{x}$, se não "cair fora" de $[a,b]$.

Note que não houve preocupação com convergência nos itens acima.

Questão 2 Seja $\Phi(x) = \frac{x + \cos x}{4}$.

(a) Mostre que Φ tem um ponto fixo $\overline{x}$ em $[0, \pi/2]$.

(b) Calcule $\Phi'(x)$ e mostre que $|\Phi'(x)| \leq M = \frac{1}{2}$ para todo x.

(c) Determine qual extremidade de $[0, \pi/2]$ é mais próxima de $\overline{x}$ e escolha essa extremidade como x_0.

(*Nessas condições, como $M = 1/2 < 1$, pode-se concluir que a sequência $x_n = \Phi(x_{n-1}), n \geq 1$, permanece em $[0, \pi/2]$.*)

(d) Note que como Φ é C^1, usando o Teorema do Valor Médio para os pontos x_{n-1} e $\overline{x}$ tem-se

$$x_n - \overline{x} = \Phi(x_{n-1}) - \Phi(\overline{x}) = \Phi'(\eta_{n-1})(x_{n-1} - \overline{x}),$$

para algum η_{n-1} entre x_{n-1} e $\overline{x}$,

o que fornece informações sobre os erros $x_n - \overline{x}$ e $x_{n-1} - \overline{x}$. Use isso para concluir que a sequência $x_n, n \geq 0$, permanece sempre à direita, ou então sempre à esquerda, de $\overline{x}$.

(e) Use a igualdade

$$x_n - \overline{x} = \Phi'(\eta_{n-1})(x_{n-1} - \overline{x}), \text{ para algum } \eta_{n-1} \text{ entre } x_{n-1} \text{ e } \overline{x},$$

apresentada em (d), para concluir que $|x_n - \overline{x}| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1} - \overline{x}|$, para cada $n \in \mathbf{N}$. A seguir, use isso para mostrar que o erro absoluto $|x_n - \overline{x}|$ converge para 0 quando n tende a infinito.