MAP0151 - Cálculo Numérico e Aplicações

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2017

$1^{\underline{a}}$ Lista - 28/03/2017

Entregar os exercícios 1, 2 e 5 até 04/04/2017

Exercício 1

(a) Podemos usar o Método da Dicotomia no intervalo $[1, 2]$ para obter uma aproximação do zero $\overline{x} = \ln 3$ de $f(x) = e^x - 3$? Justifique sua resposta.

(b) Se a resposta em (a) for SIM, faça 3 iterações do Método da Dicotomia para aproximar $\overline{x} = \ln 3$ e avalie o erro cometido (sem usar o valor de $\ln 3$, é claro!)

Exercício 2 Considere $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = cosx - 2x$. Justifique as seguintes afirmações:

(a) f tem pelo menos um zero em $[0, \pi/2]$.

(b) f tem no máximo um zero em $[0, \pi/2]$.

Exercício 3 Considere $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2.$$

Mostre que f tem exatamente um zero em $[0, 1]$.

Exercício 4 *Método das Tangentes*

Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ tal que

$$\begin{array}{cc} f \text{ é de classe } C^2, & f(a)f(b) < 0, \\ f'(x) > 0,\ \forall x \in [a, b], & f''(x) > 0,\ \forall x \in [a, b]. \end{array} \tag{1}$$

Considere o seguinte algoritmo para aproximar a raiz $\overline{x} \in [a, b]$ de f:

- **Inicialização:** Toma-se para aproximação inicial de $\overline{x}$ o valor $x_0 = b$.
- **$1^{\underline{a}}$ Etapa:** Obtenção da aproximação x_1 a partir de x_0:
  - (i) Traça-se (ou determina-se) a reta r_1 (com equação $y = a_1 x + b_1$) que é tangente ao gráfico de f e que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de f.

(ii) Determina-se x_1 (no eixo dos x) dado pela intersecção da reta r_1 com o eixo com o eixo dos x.

- **n-ésima Etapa:** Obtenção da aproximação x_n a partir de x_{n-1}:

  (i) Determina-se a reta r_n (com equação $y = a_n x + b_n$) que é tangente ao gráfico de f e que passa pelo ponto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ do gráfico de f.

  (ii) Determina-se x_n (no eixo dos x) dado pela intersecção da reta r_n com o eixo com o eixo dos x.

(a) Represente graficamente uma função f nas condições anteriores, e a correspondente sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$

(b) Determine a expressão de x_n em função de x_{n-1}.

(c) Mostre que a função $f(x) = x^3 - 7, \; x \in [a, b] = [1, 3]$, satisfaz as condições (2).

(d) Aplique o método descrito acima para obter as aproximações x_0, x_1 e x_2 da raiz $\overline{x} \in [a, b] = [1, 3]$ da função f do item (c).

Exercício 5 *Método das Secantes*
Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ tal que

$$\begin{array}{cc} f \text{ é de classe } C^2, & f(a)f(b) < 0, \\ f'(x) < 0, \; \forall x \in [a, b], & f''(x) < 0, \; \forall x \in [a, b]. \end{array} \tag{2}$$

Considere o seguinte algoritmo para aproximar a raiz $\overline{x} \in [a, b]$ de f:

- **Inicialização:** Toma-se para aproximação inicial de $\overline{x}$ o valor $x_0 = a$.

- **1ª Etapa:** *Obtenção da aproximação x_1 a partir de x_0:*

  (i) Traça-se (ou determina-se) a reta r_1 (com equação $y = a_1 x + b_1$) que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(b, f(b))$ do gráfico de f.

  (ii) Determina-se x_1 (no eixo dos x) dado pela intersecção da reta r_1 com o eixo com o eixo dos x.

- **n-ésima Etapa:** *Obtenção da aproximação x_n a partir de x_{n-1}:*

  (i) Determina-se a reta r_n (com equação $y = a_n x + b_n$) que passa pelos pontos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ e $(b, f(b))$ do gráfico de f.

(ii) Determina-se x_n (no eixo dos x) dado pela intersecção da reta r_n com o eixo com o eixo dos x.

(a) Represente graficamente uma função f nas condições anteriores, e a correspondente sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$

(b) Determine a expressão de x_n em função de x_{n-1}.

(c) Mostre que a função $f(x) = 4 - x^3 - 2x,\ x \in [a, b] = [1, 2]$, satisfaz as condições (2).

(d) Aplique o método descrito acima para obter as aproximações x_0, x_1 e x_2 da raiz $\overline{x} \in [a, b] = [1, 2]$ da função f do item (c).