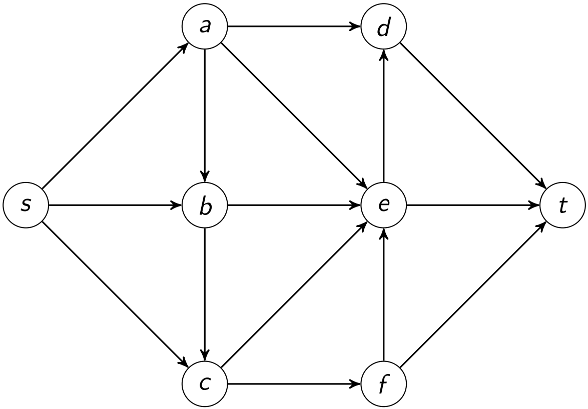
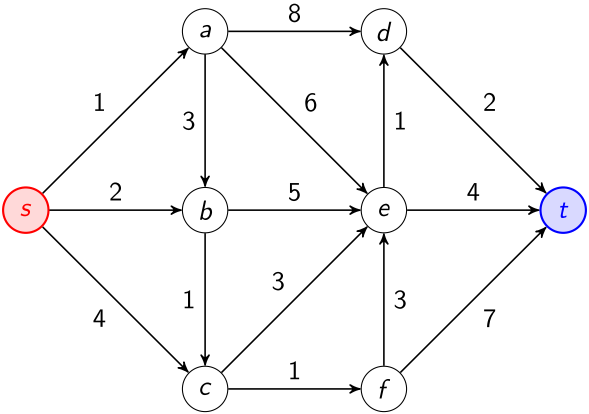
Trilha de Teoria da Computação: módulo Otimização

28 de abril de 2016

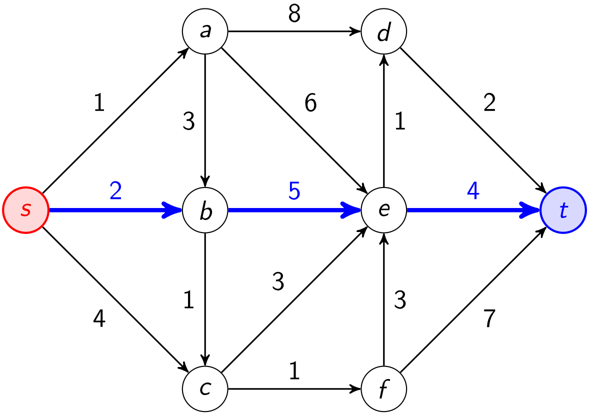
Grafos



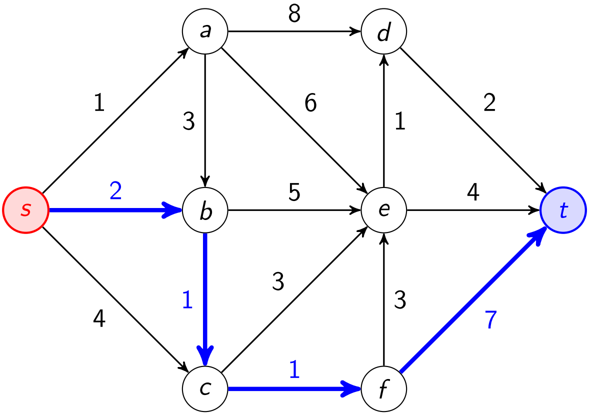
Caminhos em grafos



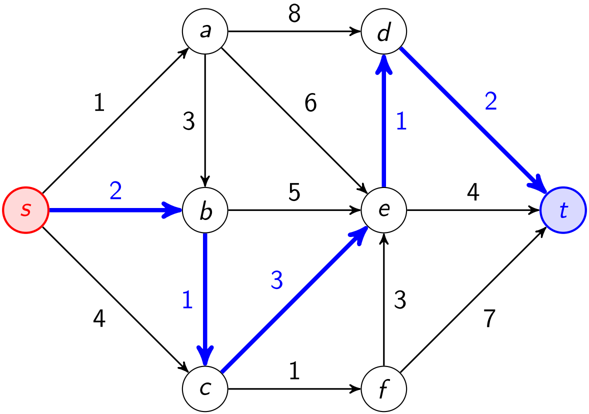
Caminhos em grafos



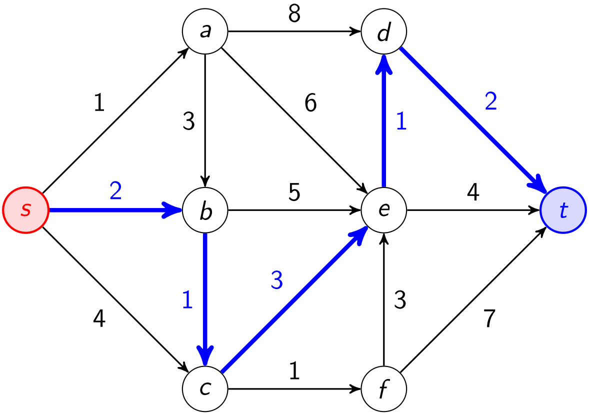
Caminhos em grafos



Caminhos em grafos



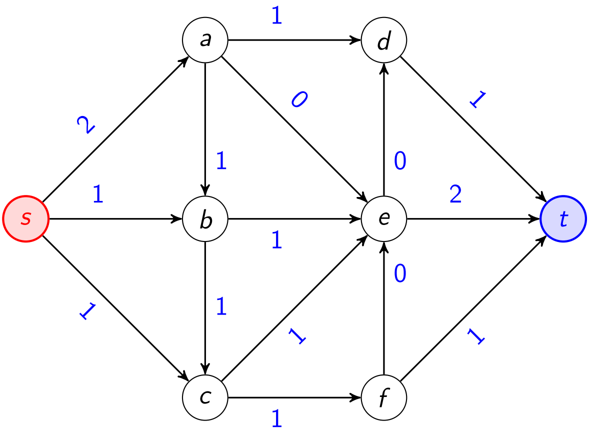
O problema do caminho mínimo



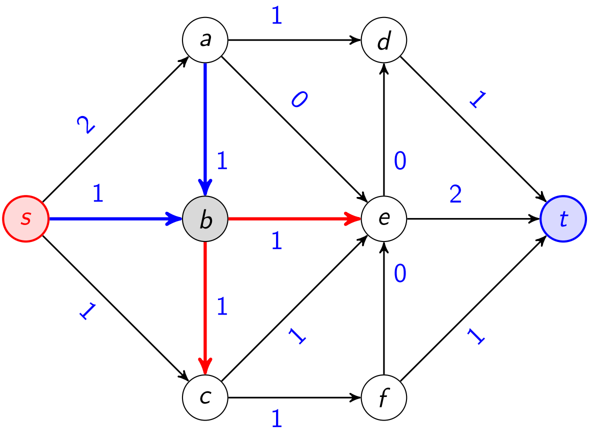
Minimizar comprimento de P

sujeito a P é um caminho no grafo G

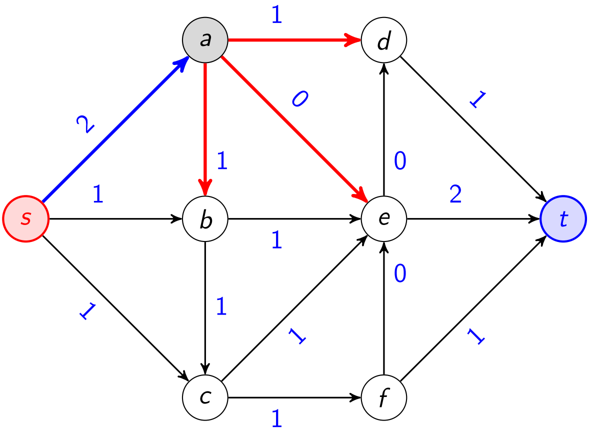
Fluxos em grafos



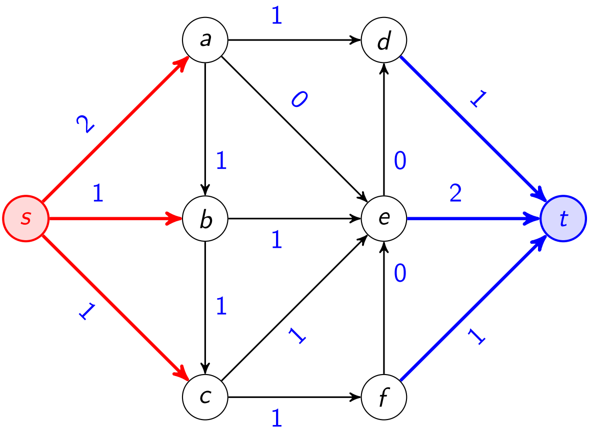
Fluxos em grafos



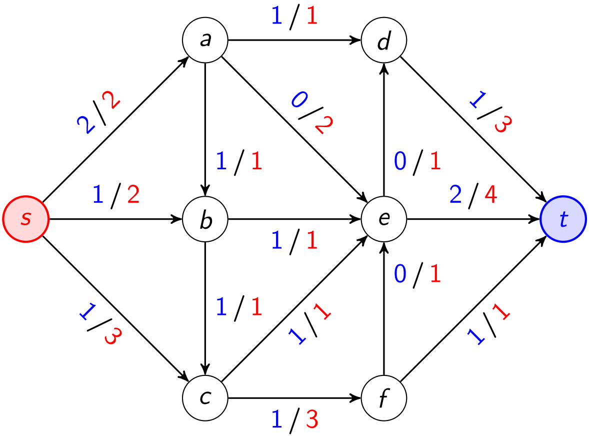
Fluxos em grafos



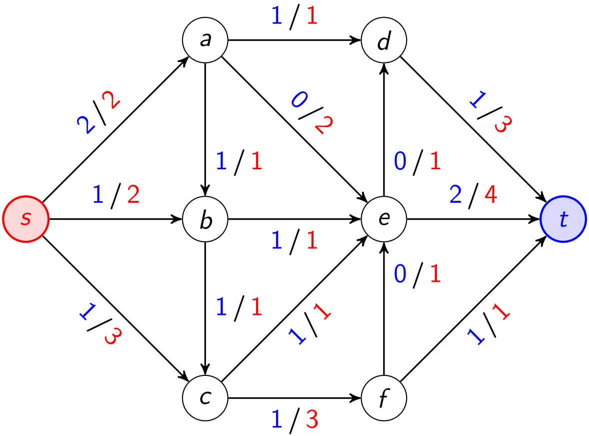
Fluxos em grafos



Fluxos em grafos



O problema do fluxo máximo



Maximizar	valor de x
sujeito a	x conserva fluxo (exceto em s e t)
	x respeita capacidades

Problemas de otimização

Problema do caminho mínimo

Minimizar	comprimento de P
sujeito a	P é um caminho no grafo G

Problema do fluxo máximo

Maximizar	valor de x
sujeito a	x conserva fluxo (exceto em s e t)
	x respeita capacidades

Problemas de otimização

Problema do caminho mínimo

Minimizar	comprimento de P
sujeito a	P é um caminho no grafo G

Problema do fluxo máximo

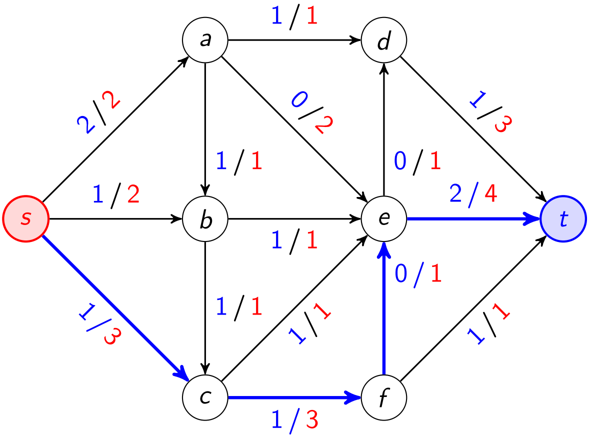
Maximizar	valor de x
sujeito a	x conserva fluxo (exceto em s e t)
	x respeita capacidades

Problema de otimização

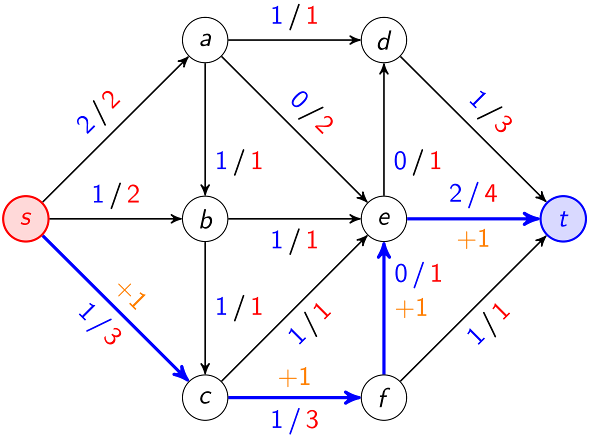
Minimizar	$f(x)$
sujeito a	$x \in X$

Plano

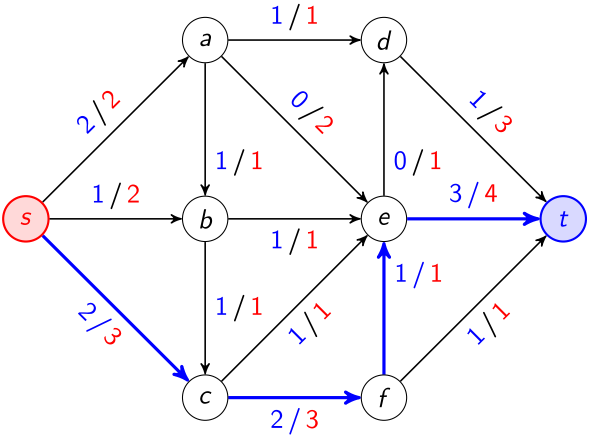
Caminhos de aumento



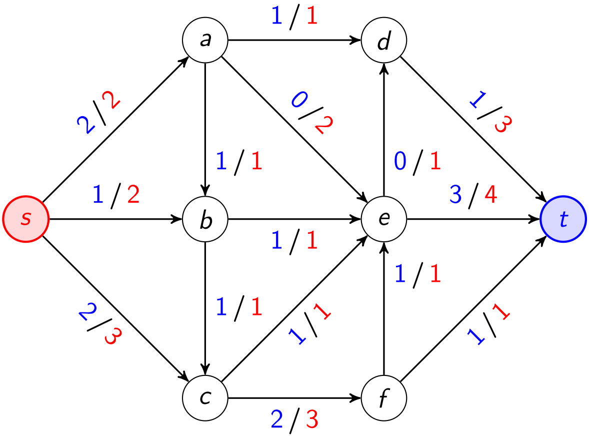
Caminhos de aumento



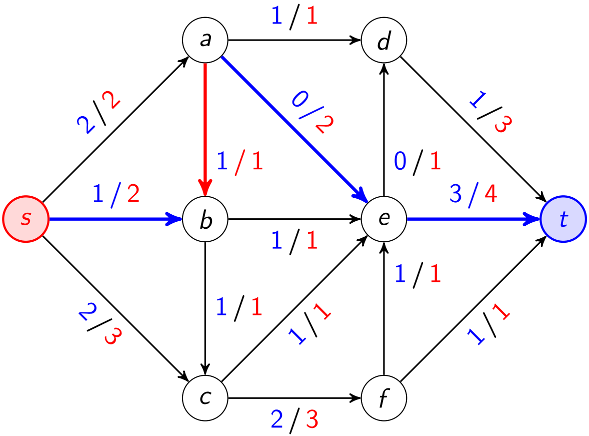
Caminhos de aumento



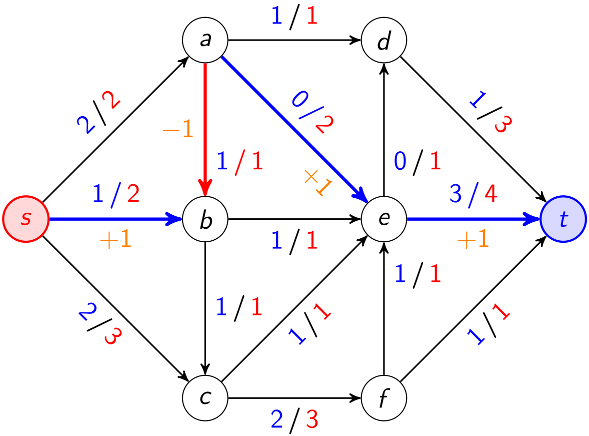
Caminhos de aumento



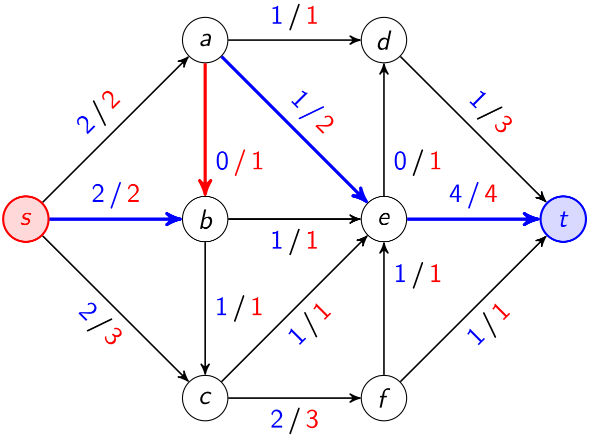
Pseudo-caminhos de aumento



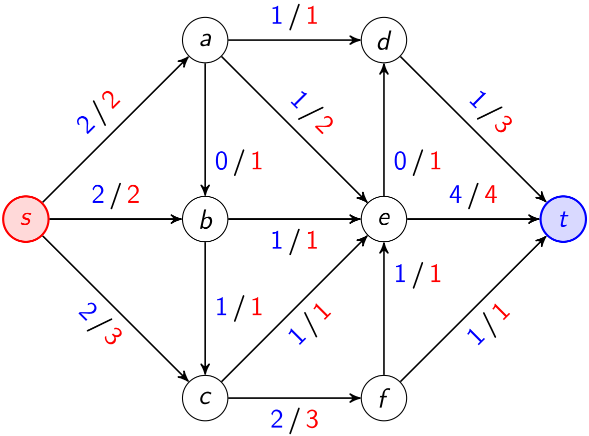
Pseudo-caminhos de aumento



Pseudo-caminhos de aumento

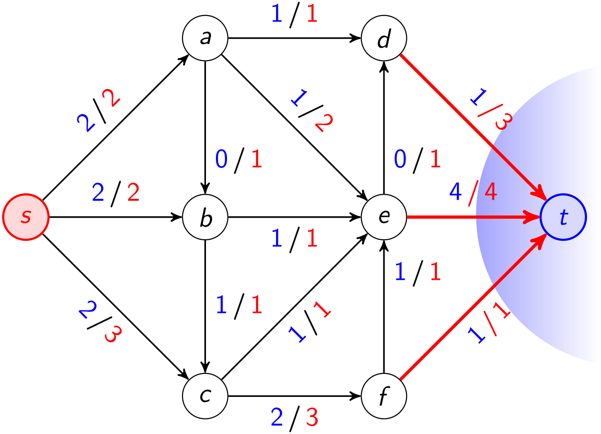


Esse fluxo é máximo?

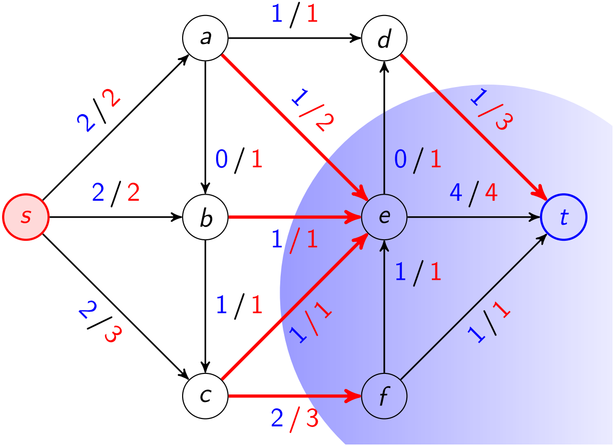


(Agradecimentos ao Prof. Coelho pelos exemplos.)

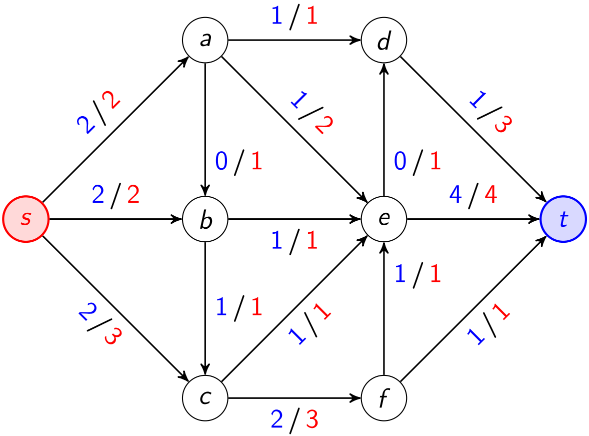
Cortes como limitantes



Cortes como limitantes

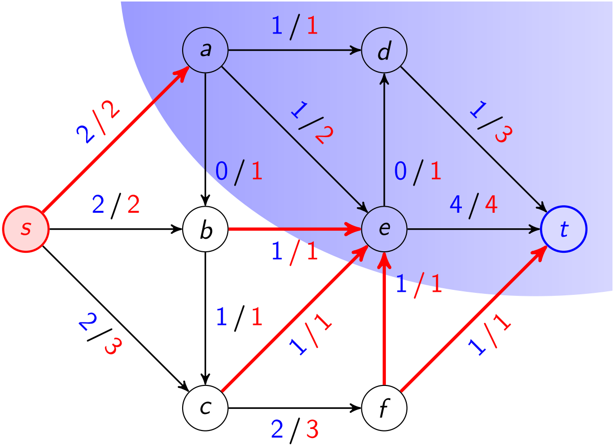


O problema do corte mínimo

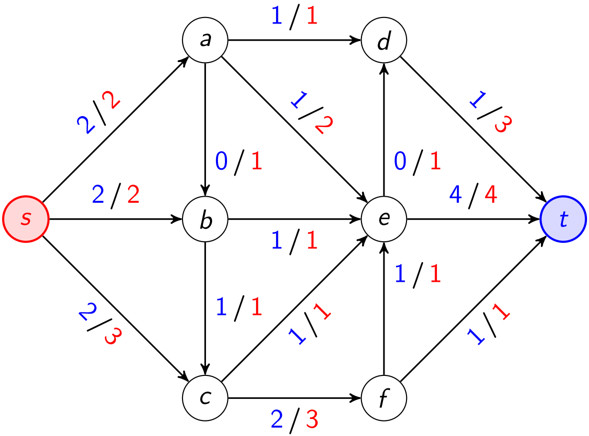


Minimizar	capacidade de C
sujeito a	C um corte que separa s e t

Fluxo máximo = Corte mínimo



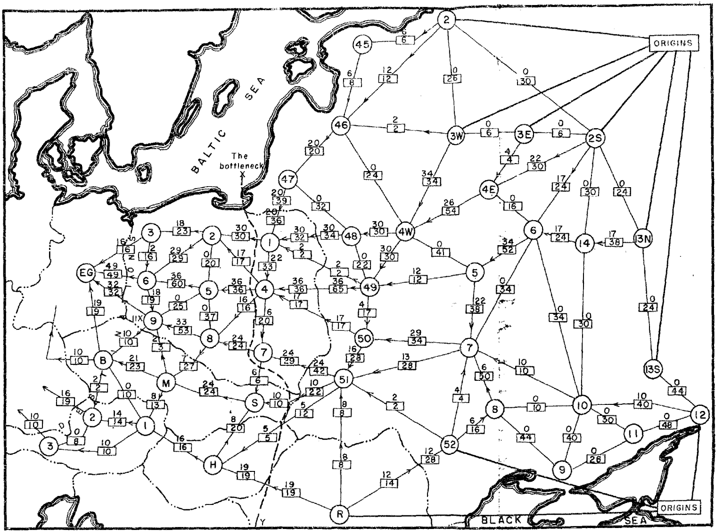
Fluxo máximo = Corte mínimo



Teorema/Algoritmo de Ford-Fulkerson

Fluxo máximo = Corte mínimo

A real motivação



Plano

Exemplo: fluxo em reeds

Encontrando fluxos máximos

Sabores de otimização

O módulo de otimização

Otimização combinatória

Problema de otimização combinatória

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \underbrace{X}_{\textbf{finito}} \end{array}$$

Otimização combinatória

Problema de otimização combinatória

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \underbrace{X}_{\textbf{finito}} \end{array}$$

Exemplo: problema do caminho mínimo

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \text{comprimento de } P \\ \text{sujeito a} & P \text{ é um caminho no grafo } G \end{array}$$

Exemplo: problema do corte mínimo

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \text{capacidade de } C \\ \text{sujeito a} & C \text{ um corte que separa } s \text{ e } t \end{array}$$

Otimização combinatória

Problema de otimização combinatória

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \underbrace{X}_{\textbf{finito e implícito}} \end{array}$$

Exemplo: problema do caminho mínimo

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \text{comprimento de } P \\ \text{sujeito a} & P \text{ é um caminho no grafo } G \end{array}$$

Exemplo: problema do corte mínimo

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \text{capacidade de } C \\ \text{sujeito a} & C \text{ um corte que separa } s \text{ e } t \end{array}$$

Programação linear

Problema de programação linear

Minimizar	$c^{\mathsf{T}} x$	(função linear)
sujeito a	$Ax \leq b$	(inequações lineares)

Programação linear

Problema de programação linear

Minimizar	$c^{\mathsf{T}} x$	(função linear)
sujeito a	$Ax \leq b$	(inequações lineares)

Exemplo: problema do fluxo máximo

Maximizar	valor de x
sujeito a	x conserva fluxo (exceto em s e t)
	x respeita capacidades

Programação linear

Problema de programação linear

Minimizar	$c^{\mathsf{T}} x$	(função linear)
sujeito a	$Ax \leq b$	(inequações lineares)

Exemplo: problema do fluxo máximo

Maximizar	valor de x
sujeito a	x conserva fluxo (exceto em s e t)
	x respeita capacidades

- amplamente aplicável
- programação $\stackrel{?}{=}$ otimização (alocação de recursos)
- algoritmos eficientes (teoria e prática)
- motor de algoritmos e outros "sabores"

Programação inteira

Problema de programação linear

Minimizar	$c^{\mathsf{T}} x$	(função linear)
sujeito a	$Ax \le b$	(inequações lineares)

Programação inteira

Problema de programação linear inteira

Minimizar	$c^{\mathsf{T}} x$	(função linear)
sujeito a	$Ax \leq b$	(inequações lineares)
	$x \in \mathbb{Z}^n$	**(integralidade)**

Programação inteira

Problema de programação linear inteira

Minimizar	$c^{\mathsf{T}} x$	(função linear)
sujeito a	$Ax \leq b$	(inequações lineares)
	$x \in \mathbb{Z}^n$	**(integralidade)**

- $0 \leq x_1 \leq 1$ e $x_1 \in \mathbb{Z} \iff x_1 \in \{0, 1\}$
- permite modelar decisões booleanas/binárias
- se apóia em ferramentas de programação linear
- algoritmos "quase" eficientes (sob medida)

Programação não linear

Problema de programação/otimização (não-linear)

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(x) \\
\text{sujeito a} & g_1(x) \geq 0 \\
& \vdots \\
& g_m(x) \geq 0
\end{array}
$$

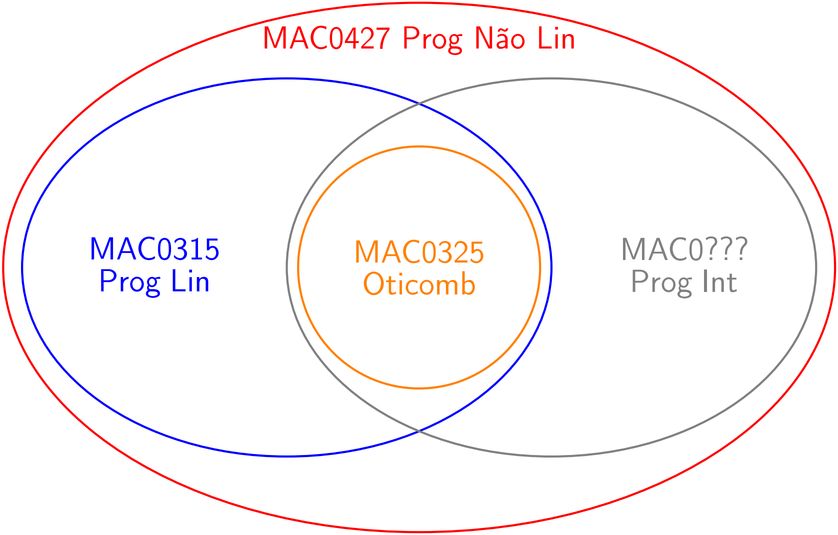
Programação não linear

Problema de programação/otimização (não-linear)

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(x) \\
\text{sujeito a} & g_1(x) \geq 0 \\
 & \vdots \\
 & g_m(x) \geq 0
\end{array}
$$

- funções $f, g_1, \ldots, g_m$ suaves/diferenciáveis
- formulação de problemas com modelos inerentemente não lineares
- técnicas mais próximas de cálculo
- possíveis dificuldades numéricas

Mapa


MAC0427 Prog Não Lin
MAC0315
Prog Lin
MAC0325
Oticomb
MAC0???
Prog Int

Otimização em outras áreas

Ferramentas de otimização são fundamentais em alguns problemas de:

- aprendizado de máquina
- visão computacional
- controle e automação
- finanças

Plano

Exemplo: fluxo em reeds

Encontrando fluxos máximos

Sabores de otimização

O módulo de otimização

Obrigatória I: programação linear

- Como formular programas lineares

  Truques de formulação

- O algoritmo simplex

  "Escolha uma direção de melhora e ande nela o máximo possível."

- Dualidade [Fluxo-máx Corte-mín "turbinado"]

  Teoria profunda e elegante

- Análise de sensibilidade

  Conceitos de economia (preços ótimos) e teoria dos jogos (equilíbrio)

Obrigatória II: otimização combinatória

- Problemas de otimização sobre grafos
  - caminhos de comprimento mínimo
  - fluxo máximo + aplicações
  - atribuição de tarefas a trabalhadores

  "Estrutura" dos problemas e algoritmos eficientes

- Formulação linear de programas inteiros

  Conexão com programação linear (motor)

- Método de projeto de algoritmos: primal-dual

  Abordagem para desenvolver algoritmos para problemas, como divisão e conquista, programação dinâmica, etc

Optativas

1. Grandes áreas
   - MAC0??? Programação inteira
   - MAC0427 Programação não linear
   - MAC0300 Métodos numéricos da álgebra linear
   - MAC0343 Programação semidefinida e aplicações
2. Enfoque combinatório
   - MAC0450 Algoritmos de aproximação
   - MAC0452 Tópicos de otimização combinatória
3. Métodos aplicados a áreas mais específicas
   - MAC0418 Tópicos especiais de programação matemática
   - MAC0419 Métodos de otimização em finanças
   - MAC0461 Introdução ao escalonamento e aplicações