MAT3120 Cálculo Diferencial e Integral III - 1º Semestre de 2015

4ª PROVA - Peso 2 02/07/2015

Para a nota, será considerada pelo menos uma questão de cada PARTE, num total de 10 pontos.

PARTE I

Questão 1 Considere no plano xz do espaço xyz a reta T de equação $z = x$ e tome a superfície cônica $\widetilde{\mathcal{S}}$ no espaço xyz obtida pela rotação da reta T ao redor do eixo dos z. A superfície $\widetilde{\mathcal{S}}$ tem equação $z^2 = x^2 + y^2$.

A superfície $\widetilde{\mathcal{S}}$ corta a esfera de centro na origem e raio 1 em três partes, uma parte $\mathcal{S}_N$ que contém o "Polo Norte" (ponto $N = (0, 0, 1)$), uma parte $\mathcal{S}_S$ que contém o "Polo Sul" (ponto $S = (0, 0, -1)$), uma parte $\mathcal{S}$ que contém o "Equador" (circunferência que está na esfera e no plano xy).

Use coordenadas esféricas para calcular a área da superfície $\mathcal{S}$.

Questão 2 Considere a superfície hiperbólica de equação $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Calcule a massa da parte dessa superfície que está dentro da região $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, sabendo que a densidade superficial de massa é dada por $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)^3 z^2$.

Questão 3 Considere a superfície $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ definida por $z = xy, (x, y) \in T \subset \mathbf{R}^2$, orientada com normal unitária que tem componente positiva na direção do eixo dos z, e o campo vetorial dado por $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

Calcule o fluxo do campo vetorial F através da superfície orientada $\mathcal{S}$ nos seguintes casos:

(a) $T = [0, 1] \times [0, 2]$.

(b) $T =$ triângulo de vértices $A = (0, 0), B = (1, 0)$ e $C = (1, 2)$.

PARTE II

Questão 4 Considere em $\mathbf{R}^3$ a função $f(x, y, z) = x^2 z^3 e^{2y}$ e o campo vetorial $G(x, y, z) = (xy, yz, xyz)$. Calcule:

(a) grad f. (b) div G. (c) div (grad f).
(d) rot (grad f). (e) rot (grad $f + G$).

PARTE III

Questão 5 Considere o campo vetorial

$$F(x, y) = (3y + \sin y + e^{x+\cos y}, 3y + x \cos y - (\sin y)e^{x+\cos y}),$$

e a curva poligonal simples fechada $C = C_1 \cup C_2$ no plano, orientada no sentido positivo, onde C_1 é a semi-circunferência de cento na origem e raio 1 em que $x \geq 0$ e C_2 é o segmento de reta que vai do ponto $P_1 = (0, 1)$ ao ponto $P_2 = (0, -1)$.

Calcule $\int_C F.dr$, e justifique seus cálculos.

Questão 6 Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = (y - x, yz, -xz)$ através da superfície formada pelas faces do cubo $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ que não estão no plano xy, orientada com a normal exterior ao cubo.

Questão 7 Considere o sólido definido por

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + 2x^2 + 2y^2\}.$$

Considere a superfície $\mathcal{S}$ desse sólido orientada segundo a normal exterior (exceto nas "arestas", claro). Seja F o campo vetorial definido por $F(x, y, z) = (2x + 3y^2, 3y, 4z - 5)$. Calcule

$$\int_{\mathcal{S}} F.ndS.$$

Questão 8 Seja $V : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^2. Calcule $\int_C \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy$, onde C é a curva formada por dois arcos de circunferência C_1 e C_2 e dois segmento C_3 e C_4, a saber:

C_1 é o arco da circunferência de cento na origem e raio 1 que fica no 1o. quadrante, C_2 é o arco da circunferência de centro $(1, -1)$ e raio $\sqrt{5}$ que fica no 2o. quadrante, C_3 é o segmento ligando $(-1, 0)$ a $(0, -1)$ e C_4 é o segmento ligando $(0, -1)$ a $(1, 0)$.

Questão 9 Seja $\mathcal{V}$ o sólido em $\mathbf{R}^3$ cujo formato é o da metade da bola de centro na origem e raio 3 com $z \geq 0$, com sua superfície $\mathcal{S}$ orientada pela normal exterior. Calcule o fluxo do campo vetorial $F = (2xy, -y^2+z, x^2+5z)$ através da superfície orientada $\mathcal{S}$.

Questão 10 Seja $\mathcal{S}$ a porção da esfera esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que contém o ponto $(0, 0, 3)$ obtida cortando-se a esfera com o plano $x + y + z = 1$. Seja C o bordo de $\mathcal{S}$. Escolha um sentido de percurso para C e calcule

$$\int_C (2xyz^3 + e^x y)dx + (x^2 z^3 + e^x + e^y z)dy + (3x^2 yz^2 + e^y)dz.$$

PARTE IV

Questão 11 Seja $a > 0$. Mostre que o seguinte problema não tem solução de classe C^2:

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 + z^2 & \text{em } B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z) = 0 & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Questão 12 Seja $\mathcal{S}$ a parte da superfície esférica de centro na origem e raio 2 cujos pontos têm coordenada z maior ou igual a 1. Considere $\mathcal{S}$ orientada pelos vetores normais que apontam para fora da esfera. Use coordenadas esféricas $\phi(\theta, \eta) = (x(\theta, \eta), y(\theta, \eta), z(\theta, \eta)) = (2 \sin \theta \cos \eta, 2 \sin \theta \sin \eta, 2 \cos \theta)$ e calcule

$$\int_{\mathcal{S}} x \, dz \wedge dx.$$