MAT3120 Cálculo Diferencial e Integral III - 1º Semestre de 2015

3ª PROVA - Peso 2 18/06/2015

Para a nota, será considerada uma questão de cada GRUPO.

GRUPO A

Questão 1 (1.5 pontos) Calcule a massa de uma placa triangular T cujos vértices são os pontos $A = (0, 0), B = (1, 1)$ e $C = (2, 0)$ e cuja densidade superficial de massa é dada por $\rho(x, y) = x + y$.

Questão 2 (2.0 pontos) Calcule o momento de inércia de uma placa triangular T cujos vértices são os pontos $A = (0, 0), B = (1, 1)$ e $C = (2, 0)$ e cuja densidade superficial de massa é dada por $\rho(x, y) = x$ em relação ao eixo dos y.

GRUPO B

Questão 3 (1.5 pontos) Um bloco de madeira contido no espaço xyz tem forma de um prisma cuja base é um triângulo B contido no plano xy, de vértices $B = (0, 0, 0), B = (2, 0, 0)$ e $C = (0, 2, 0)$, suas três faces laterais são verticais e sua altura mede 20. Esse bloco é cortado em três partes usando-se as superfícies de corte $z = \phi(x, y) = x^2 + y^2$ e $z = \eta(x, y) = x^2 + x + 2y^2$. Calcule o volume da parte do meio obtida.

Questão 4 (2.0 pontos) No espaço xyz com plano horizontal xy e eixo vertical z apontando para cima, considere a parte W da bola de cento na origem e raio 5 que fica entre os planos paralelos $x = 0$ e $x = 2$, entre os planos paralelos $y = 0$ e $y = 1$, e inferiormente é delimitada pelo plano xy. Se W é homogênea com densidade de massa $\rho(x, y, z) = 3/V_0$, onde V_0 é o volume de W (e portanto a massa de W é 3), calcule a terceira coordenada do centro de massa, deixando-a expressa em termos de V_0.

GRUPO C

Questão 5 (2.0 pontos) Use coordenadas polares

$$(x, y) = \phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta),$$

para calcular a área da região que se encontra no primeiro quadrante do plano xy delimitada pelas retas $x = 0$ e $y = x$, e está entre a circunferência de raio 1 e a curva C cuja equação é $\sqrt{x^2 + y^2} = (\arctan(y/x))^2$ (*que em coordenadas polares fica* $r = \theta^2$).

Questão 6 (1.5 pontos) Use coordenadas esféricas

$$(x, y, z) = \phi(r, u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u)$$

para mostrar que a bola de centro na origem e raio β tem volume $V_\beta = \frac{4\pi\beta^3}{3}$.

Questão 7 (1.5 pontos) A mudança de variáveis $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ definida por $(x, y) = \phi(u, v) = (4u + 6v, 10u + 2v)$ tem como imagem o paralelogramo R do plano xy determinado pelos *vetores* $(4, 10)$ e $(6, 2)$ (isto , dois dos lados consecutivos são os segmentos que ligam a origem ao *ponto* $(4, 10)$ e a origem ao *ponto* $(6, 2)$.

Use essa mudança de variávreis para calcular a massa de uma placa cujo formato é R e cuja densidade superficial de massa é dada por $\rho(x, y) = e^{2x} + xy$.

Questão 8 (2.0 pontos) Use coordenadas cilíndricas para calcular o volume da região do espaço xyz definida pelas desigualdades

$$x^2 + y^2 \leq 4;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ 2 - x - y \leq z \leq 12 + x + y.$$

GRUPO D

Questão 9 (2.0 pontos) Considere um fio no espaço xyz que cujo formato é dado pela curva $C \subset \mathbf{R}^3$ parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2), t \in [0, 2]$.

Calcule a massa desse fio sabendo que sua densidade linear de massa é dada por $\rho(x, y, z) = 4(x^2 + y^2)z$.

GRUPO E

Questão 10 (1.5 pontos) Calcule o trabalho realizado pela força $F(x, y, z) = (-y, x, (x^2+y^2)z^3)$ para deslocar uma partícula da posição $(1, 0, 0)$ para a posição $(\cos 1, \sin 1, 1)$ ao longo da curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2), t \in [0, 1]$.

Questão 11 (1.5 pontos) Calcule $\int_\gamma G(x, y, x).dr$ onde $G(x, y, x) = (y, x, 2z)$ e $\gamma(t) = (t, t^2, 2t), 0 \leq t \leq 1$.

Questão 12 (1.5 pontos) Considere a curva $\gamma(t) = (t^2, t^2, t), 0 \leq t \leq 1$, e calcule $\int_\gamma y\,dx + 2x\,dy + z^2\,dz$.

GRUPO F

Questão 13 (2.0 pontos) Seja C a curva poligonal fechada simples formada pelos segmentos $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_0}$, onde $P_0 = (0, 0), P_1 = (1, 0), P_2 = (1, 2)$ e $P_3 = (0, 1)$, orientada positivamente.

Calcule $\int_C (2x^3y^2 - x^2)\,dx + x^4y\,dy$.