

Campos e notação de formas diferenciais - 1º Semestre de 2015

Cuidado: Não revisado e incompleto!

**Uma nova versão será colocada no
lugar desta dentro de 24 horas!**

Campos especiais em $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^2$

Campo escalar C^1 f	Gradiente (campo vetorial) $\text{grad} f = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$
Campo escalar C^1 u	Laplaciano (campo escalar) $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Campos especiais em $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^3$

Campo escalar C^1 f	Gradiente (campo vetorial) $\text{grad} f = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$
Campo vetorial C^1 $F = (F_1, F_2, F_3)$	Divergente (campo escalar) $\text{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$
Campo vetorial C^1 $G = (G_1, G_2, G_3)$	Rotacional (campo vetorial) $\text{rot} G = \nabla \times G = (\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y})$
Campo escalar C^2 u	Laplaciano (campo escalar) $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \text{div}(\text{grad} u) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Manipulação algébrica considerando $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
 \nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
 \nabla \cdot F &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\
 \nabla \times F &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (G_1, G_2, G_3) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) k \\
 \Delta u &= \nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\
 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

Associação entre campos e formas diferenciais em $\Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^2$

Campo escalar em $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ f	0-Forma diferencial em $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ $\omega = f(x, y)$
Campo vetorial em $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ $F = (P, Q)$	1-Forma diferencial em $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$
Campo escalar em $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ g	2-Forma diferencial em $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ $\omega = g(x, y)dx \wedge dy$

Associação entre campos e formas diferenciais em $\Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^3$

Campo escalar em $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ f	0-Forma diferencial em $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ $\omega = f(x, y, z)$
Campo vetorial em $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ $F = (P, Q, R)$	1-Forma diferencial em $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$
Campo vetorial em $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ $F = (A, B, C)$	2-Forma diferencial em $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ $\omega = A(x, y, z)dy \wedge dz + B(x, y, z)dz \wedge dx + C(x, y, z)dx \wedge dy$
Campo escalar em $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ g	3-Forma diferencial em $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ $\omega = g(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$

Derivação de formas diferenciais em $\Omega = \Omega^o \subset \mathbb{R}^2$

k-forma ω	derivada $d\omega$
0-forma C^1 $\omega = f(x, y)$	1-forma $d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$
1-forma C^1 $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$	2-forma $d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$ $= (\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy) \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy) \wedge dy$ $= (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$

Derivação de formas diferenciais em $\Omega = \Omega^o \subset \mathbb{R}^3$

k-forma ω	derivada $d\omega$
0-forma C^1 $\omega = f(x, y, z)$	1-forma $d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$
1-forma C^1 $\omega = P(x, y, z)dx +$ $+Q(x, y, z)dy +$ $+R(x, y, z)dz$	2-forma $d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$ $= (\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz) \wedge dx +$ $+ (\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz) \wedge dy +$ $+ (\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz) \wedge dz$ $= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx +$ $+ (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$
2-forma C^1 $\omega = A(x, y, z)dy \wedge dz +$ $+B(x, y, z)dz \wedge dx +$ $+C(x, y, z)dx \wedge dy$	3-forma $d\omega = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx +$ $+dC \wedge dx \wedge dy =$ $= (\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz) \wedge dy \wedge dz +$ $+ (\frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy + \frac{\partial B}{\partial z}dz) \wedge dz \wedge dx +$ $+ (\frac{\partial C}{\partial x}dx + \frac{\partial C}{\partial y}dy + \frac{\partial C}{\partial z}dz) \wedge dx \wedge dy$ $= (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz$

Relação entre derivação de formas e os campos especiais em $\mathbf{R}^2$

Campo em $\Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^2$	Forma em $\Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^2$
campo escalar f	0-forma $\omega = f$
campo gradiente $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$	1-forma $d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$
campo vetorial $G = (G_1, G_2)$	1-forma $\omega = G_1dx + G_2dy$
campo escalar do T. Green $g = (\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y})$	2-forma $d\omega = (\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y})dx \wedge dy$

Relação entre derivação de formas e os campos especiais em $\mathbf{R}^3$

Campo em $\Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^3$	Forma em $\Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^3$
campo escalar f	0-forma $\omega = f$
campo gradiente $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$	1-forma $d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$
campo vetorial $G = (G_1, G_2, G_3)$	1-forma $\omega = G_1dx + G_2dy + G_3dz$
campo rotacional $\nabla \times G =$ $(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y})$	2-forma $d\omega = (\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z})dy \wedge dz +$ $+(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y})dx \wedge dy$
campo vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$	2-forma $\omega = F_1dy \wedge dz + F_2dz \wedge dx + F_3dx \wedge dy$
campo divergente $\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$	3-forma $d\omega = (\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz$

Teorema de Green

Teorema 1 (Teorema de Green - com notação de formas diferenciais)

Se $\mathcal{R} \subset \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^2$ é uma região limitada cuja fronteira $C = \partial\mathcal{R}$ é uma curva de Jordan C^1 por partes, orientada positivamente, e $\mathcal{R}$ pode ser decomposta tanto em um número finito de sub-regiões do tipo I como em um número finito sub-regiões do tipo II, e

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

é uma 1-forma C^1 em Ω , então

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} d\omega,$$

isto é,

$$\int_{\partial\mathcal{R}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Teorema 2 (Teorema de Green - com notação de campos vetoriais)

Se $\mathcal{R} \subset \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^2$ é uma região limitada cuja fronteira $C = \partial\mathcal{R}$ é uma curva de Jordan C^1 por partes, orientada positivamente, e $\mathcal{R}$ pode ser decomposta tanto em um número finito de sub-regiões do tipo I como em um número finito sub-regiões do tipo II, e

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

é um campo vetorial C^1 em Ω , então

$$\int_{\partial\mathcal{R}} F \cdot dr = \int_{\partial\mathcal{R}} Pdx + Qdy = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Teorema da Divergência

Teorema 3 (Teorema da Divergência - com notação de formas diferenciais)

Se $\mathcal{R} \subset \Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^3$ é uma região limitada cuja fronteira $\mathcal{S} = \partial\mathcal{R}$ é uma superfície orientável fechada C^1 por partes, orientada positivamente (isto é, orientada pela normal exterior a $\mathcal{R}$), e $\mathcal{R}$ pode ser decomposta tanto em um número finito de sub-regiões do tipo I, como em um número finito sub-regiões do tipo II, como num número finito sub-regiões do tipo III, e

$$\omega = A(x, y, z)dy \wedge dz + B(x, y, z)dz \wedge dx + C(x, y, z)dx \wedge dy$$

é uma 2-forma C^1 em Ω , então

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} d\omega,$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathcal{R}} A(x, y, z)dy \wedge dz + B(x, y, z)dz \wedge dx + C(x, y, z)dx \wedge dy \\ &= \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Teorema 4 (Teorema da Divergência - com notação de campos vetoriais)

Se $\mathcal{R} \subset \Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^3$ é uma região limitada cuja fronteira $\mathcal{S} = \partial\mathcal{R}$ é uma superfície orientável fechada C^1 por partes, orientada positivamente (isto é, orientada pela normal exterior a $\mathcal{R}$), e $\mathcal{R}$ pode ser decomposta tanto em um número finito de sub-regiões do tipo I, como em um número finito sub-regiões do tipo II, como num número finito sub-regiões do tipo III, e

$$F(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

é um campo vetorial C^1 em Ω , então

$$\int_{\partial\mathcal{R}} F \cdot n dS = \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} F dV,$$

isto é, pondo $n = (n_1, n_2, n_3)$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathcal{R}} (An_1 + Bn_2 + Cn_3) dS \\ &= \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

Teorema de Stokes