**MAT3120 Cálculo Diferencial e Integral III**

**$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2015**

**$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios**

**Entregar o primeiro exercício de cada PARTE até 02/07/2015**

Nesta lista procura-se explorar principalmente Integral de Superfície, e os teoremas de Green, Gauss e Stokes.

## PARTE A - Integral de Superfície

**Exercício 1** Use coordenadas esféricas para calcular a área da parte $\mathcal{S}$ da esfera de centro na origem e raio 2 que se encontra no primeiro octante, delimitada pelos planos $y = 0, x - y = 0$ e tal que cada segmento $\overline{OQ}$ ligando a origem a um ponto $Q \in \mathcal{S}$, forma ângulo $\leq \pi/6$ com o semi-eixo $Oz$ positivo.

**Exercício 2** Calcule a área da parte superfície de equação $z^2 = 2xy$ que se encontra no primeiro octante entre os planos $x = 2$ e $y = 1$.

**Exercício 3** Considere a semi-esfera $S \subset \mathbf{R}^3$ de centro na origem e raio 2 com $z \geq 0$ , orientada com normal unitária exterior á esfera.

Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (2x + 5z, 2y + 5z, 7z)$ definido em $\mathbf{R}^3$, através de $S$.

## PARTE B - Campos

**Exercício 4** Seja $\Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^3$ convexo, e $F : \Omega \to \mathbf{R}^3$ um campo vetorial de classe $C^1$.

Mostre que $F$ é campo gradiente em $\Omega$ se e só se $\text{rot } F = 0$ em $\Omega$.

**Exercício 5** Seja $\Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^3$ e sejam $\phi : \Omega \to \mathbf{R}$ e $F : \Omega \to \mathbf{R}^3$ campo escalar e campo vetorial respectivamente, de classe $C^1$.

Mostre que valem as "regras de produto":

(a) $\text{rot } (\phi F) = \phi \text{ rot } F + (\text{ grad } \phi).F$.

(b) $\text{rot } (\phi F) = \phi \text{ rot } F + \text{ grad } \phi) \times F$.

**PARTE C - Usar "Green", "Gauss" ou "Stokes"**

**Exercício 6** Considere o campo vetorial $F(x,y) = (\sin y + e^{x+\cos y}, 2x + x\cos y - (\sin y)e^{x+\cos y})$, e a curva poligonal simples fechada $\gamma$ no plano, orientada no sentido positivo, determinada pelos vrtices consecutivos $A = (0,0), B = (2,0), C = (2,3), D = (3,3)$ e $E = (0,5)$.

Calcule $\int_C F.dr$, e justifique seus cálculos.

**Exercício 7** Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x,y,z) = (y - x, yz, -xz)$ através da superfície formada pelas faces do cubo $[0,2] \times [0,2] \times [0,2]$ que não estão no plano $xy$, orientada com a normal exterior ao cubo.

**Exercício 8** A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ é interceptada pelo plano $z = 3$, que a corta em 2 sólidos. Seja $\mathcal{V}$ o menor desses sólidos, e considere sua superfície $S$ orientada pela normal exterior. Calcule

$$\int_S (xz, yz, 1).ndS.$$

**Exercício 9** Calcule a área da placa plana delimitada pela curva $C$ parametrizada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (2\sqrt{1-t^2}, t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ (0, 2-t), & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \\ (t-2, 0), & \text{se } 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

**Exercício 10** Seja $\mathcal{V}$ um sólido homogêneo do tipo considerado no Teorema da Divergência. Calcule a integral abaixo em termos do volume $V_o$ do sólido e de seu centro de massa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{x})$.

$$\int_S (y^2, 2xy, -xz).ndS.$$

**Exercício 11** Seja $C$ a curva obtida pela intersecção da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ com o plano $x + y + z = 1$. Escolha um conveniente sentido de percurso para $C$ (e o explicite na resolução!) para mostrar que

$$\int_C ydx + zdy + xdz = \pi a^2\sqrt{3}.$$

## PARTE D - Aplicações às EDPs

**Nota:** *No caso de uma bola $B$, se $\vec{n}$ é vetor unitário normal a $\partial B$, então* $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (\text{ grad } u).\vec{n}$.

**Exercício 12** Seja $a > 0$. Mostre que o seguinte problema não tem solução de classe $C^2$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,y,z) = z + z^2 & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

**Exercício 13** Seja $a > 0$. Mostre que o seguinte problema não tem solução de classe $C^2$:

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 - y^2 + z^2 & \text{em } B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,y,z) = 0 & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

## PARTE E -Explorando a notação de formas diferenciais...

**Exercício 14** Considere no plano a curva orientada $C$ que vai do ponto $(1,0)$ ao ponto $(-1,0)$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$. Calcule

$$\int_C y^2\, dx + xy\, dy.$$

**Exercício 15** Considere no espaço a curva orientada $C$ que vai do ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(-1,0,1)$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t), t \in [0, \pi]$. Calcule

$$\int_C y^2\, dx + xy\, dy + z\, dz.$$

**Exercício 16** Seja $\mathcal{S}$ a parte da superfície esférica de centro na origem e raio 2 cujos pontos têm coordenada $z$ maior ou igual a 1. Considere $\mathcal{S}$ orientada pelos vetores normais que apontam para fora da esfera. Use coordenadas esféricas $\phi(\theta, \eta) = (x(\theta,\eta), y(\theta,\eta), z(\theta,\eta)) = (2\sin\theta\cos\eta, 2\sin\theta\sin\eta, 2\cos\eta)$ e calcule

$$\int_{\mathcal{S}} z\, dy \wedge dz + x\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy.$$

**Exercício 17** Seja $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^3$ o sólido delimitado pelos planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ e pela superfície $z = 1 + x^2$. Calcule

$$\int_{\mathcal{R}} z\, dx \wedge dy \wedge dz.$$