MAT3120 Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre de 2015

2ª Lista de Exercícios

Entregar um exercício de cada PARTE até 15/06/2015

Nesta lista procura-se explorar principalmente Mudança de Variáveis, Integral de Linha e Teorema de Green. Sobre os tópicos anteriores, vários exercícios foram apresentados nas listas e nas provas.

Resumo

Seja $S \subset \mathbf{R}^3$ um sólido (fechado e limitado) cuja fronteira ∂S tem conteúdo nulo. Se $\rho(x)$ é a densidade de massa de S no ponto $x = (x_1, x_2, x_3)$, tem-se

Volume de S	$\mathcal{V} = \int_S dV$
Massa de S	$\mathcal{M} = \int_S \rho(x) dV$
Centro de massa $\overline{x}$ de S	$\mathcal{M}\overline{x}_j = \int_S x_j \rho(x) dV$
Momento de Inércia de S em relação a um eixo ℓ	$I_\ell = \int_S \delta^2(x)\rho(x)dV$, onde $\delta(x)$ é a distância do ponto x de S ao eixo ℓ
Momento de Inércia de S em relação a um plano L	$I_L = \int_S \delta^2(x)\rho(x)dV$, onde $\delta(x)$ é a distância do ponto x de S ao plano L

Proposição 1 *(Fórmula de Mudança de Variáveis)*

Seja $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^n$ *e seja* $\Phi : \Omega \to \mathbf{R}^n$ *de classe* C^1*, injetora, com* $\det J\Phi(u) \neq 0,\ \forall u \in \Omega$.

[Nessas condições, segue do Teor. F. Inversa que $\Phi(\Omega)$ *é um aberto de* $\mathbf{R}^n$ *e* $\Phi^{-1} : \Phi(\Omega) \to \Omega$ *é de classe* C^1*].*

Seja $S \subset \Phi(\Omega) \subset \mathbf{R}^n$ *um subconjunto fechado e limitado, cujo bordo* ∂S *tem conteúdo nulo, e seja* $R \subset \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^n$ *definido por* $R = \Phi^{-1}(S)$.

Nestas condições, se $f : S \to \mathbf{R}$ *é contínua e limitada então*

$$\int_S f(x)dx_1 \dots dx_n = \int_R f(\Phi(u))|\det J\Phi(u)|du_1 \dots du_n.$$

[Podemos olhar Φ *como uma mudança de variáveis que transforma* $R \subset \Omega$ *em* $S \subset \Phi(\Omega)$*, pois* Φ *transforma* $u \in \Omega$ *em* $x = \Phi(u) \in \Phi(\Omega)$*.]*

[A Fórmula de Mudança de Variáveis vale em condições um pouco mais gerais, incluindo o caso de coordenadas polares, coordenadas esfricas, coordenadas cilndricas, por exemplo.]

Notação 1 *(Notação)*

Uma notação bastante usada no contexto de Integral de Linha é a seguinte:

Se C é uma curva orientada C^1 por partes em $\mathbf{R}^2$ parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, denotando por $x(t) = \gamma_1(t)$ e por $y(t) = \gamma_2(t)$ teremos $\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \dot{\gamma}_1(t)$ e $\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = \dot{\gamma}_2(t)$, e supondo P e Q contínuas em C, definimos

$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy := \int_a^b [P(x(t),y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t))\dot{y}(t)]dt$
(como se tivéssemos "trocado" dx por $\dot{x}dt$ e dy por $\dot{y}dt$).

Note que essa integral é na verdade o *trabalho da força*

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (P(x,y), Q(x,y)),$$

que também pode ser denotada por

$$F(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j},$$

ao longo da curva C, pois:

$$\begin{aligned}
\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy &:= \int_a^b [P(x(t),y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t))\dot{y}(t)]dt \\
&= \int_a^b [F_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)]dt \\
&= \int_a^b [(F_1(\gamma_1(t),\gamma_2(t)), F_2(\gamma_1(t),\gamma_2(t))).(\gamma_1'(t),\gamma_2'(t))dt \\
&= \int_a^b F(\gamma(t)).\gamma'(t)dt \\
&= \int_C F.dr
\end{aligned}$$

Analogamente, se C é uma curva orientada C^1 por partes em $\mathbf{R}^3$ parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, denotando por $x(t) = \gamma_1(t), y(t) = \gamma_2(t)$ e por $z(t) = \gamma_3(t)$, e supondo P, Q e R contínuas em C, definimos

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz :=$$
$$\int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t) + R(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)]dt,$$

e tomando o campo $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ tem-se na verdade

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_C F.dr.$$

PARTE A - Aplicações de Integral dupla

Exercício 1 Seja $S \subset \mathbf{R}^2$ uma placa delgada limitada pelas curvas C_1, C_2, C_3 e C_4 de equações $y = 2 + \sin^2 x$, $y = 0$, $x = -\pi$ e $x = \pi$ respectivamente.

Seja $\rho(x, y) = y + 1$ a densidade superficial de massa dessa placa. Calcule sua massa.

Exercício 2 Considere a placa definida na questão 1. Calcule o centro de massa dessa placa.

PARTE B - Aplicações de Integral tripla

Exercício 3 No espaço xyz, com eixo vertical z apontando para cima encontra-se um prisma de altura $h = 5$, cuja base triangular inferior tem vértices $A = (0, 0, 0), B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 1, 1)$. Desse prisma retira-se a parte inferior e a parte superior cortando-o inferiormente pela superfície de equação $z = \phi(x, y)$ e superiormente pela superfície equação $z = \eta(x, y)$. Seja $\rho(x, y, z) = z$ a densidade de massa do sólido obtido. Calcule sua massa.

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 \ \text{ e } \eta(x, y) = xy + 3.$$

Exercício 4 Determine a primeira coordenada do centro de massa do sólido obtido no exercício anterior.

Exercício 5 Seja $S \subset \mathbf{R}^3$ um sólido (fechado e limitado) cuja fronteira ∂S tem conteúdo nulo. Seja $\rho(x)$ é a densidade de massa de S no ponto x.

Sejam ℓ o eixo dos x_1, L_2 o plano x_1x_2 e L_3 o plano x_1x_3.

Mostre que $I_\ell = I_{L_2} + I_{L_3}$.

PARTE C - Mudança de Variáveis

Exercício 6 Use coordenadas polares $(x, y) = \Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ para calcular a massa da placa contida no 1o. quadrante do plano xy, limitada pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e pelas retas de equações $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e $y = \sqrt{3}x$, cuja densidade superficial é dada por $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Exercício 7 Um cone de base circular de raio 1 e altura 5 é colocado com o vértice no centro de uma bola de raio 5.

Use coordenadas esféricas para calcular o volume da parte do cone que se encontra dentro da bola.

Exercício 8 Mostre que no caso do exercício 6, todas as hipóteses do Teorema de Mudança de Variáveis estão satisfeitas.

PARTE D - Integral de Linha I

Exercício 9 Calcule o comprimento da curva $C \subset \mathbf{R}^3$ parametrizada por $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, \frac{2\sqrt{2}}{3} t\sqrt{t}), 0 \leq t \leq \pi$.

Exercício 10 Calcule

$$\int_C (x + y) ds$$

onde C é o triângulo (contorno, apenas) de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ percorrido no sentido anti-horário.

PARTE E - Integral de Linha II

Exercício 11 Calcule

$$\int_C \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Exercício 12 Considere o seguinte campo em $\mathbf{R}^3$:

$$f(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$$

(a) Determine se o campo f é conservativo.

(b) Calcule o trabalho realizado pela força f no deslocamento de uma partícula ao longo da curva definida por

$$\gamma(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad t \in [0, \pi].$$

Exercício 13 Determinar o trabalho realizado pela força $f(x, y) = (3y^2 + 2)\vec{i} + 16x\vec{j}$ no deslocamento de uma partícula de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ ao longo da semi-elipse "superior" de equação $b^2x^2 + y^2 = b^2$.

PARTE F - Teorema de Green

Exercício 14 Calcule $\int_C (2xy + y^2/2)dx + (x^2 + xy + 5x)dy$, onde C é a circunferência de centro na origem e raio 2 orientada no sentido anti-horário.

Exercício 15 Seja $V : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ e considere o campo gradiente $F = \nabla V$.

Mostre que o $\int_C F.dr = 0$ para toda curva fechada C^1 por partes C.

Exercício 16 Calcule a área delimitada pelas curvas C_1 e C_2 onde C_1 tem parametrização $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t), 0 \leq t \leq \pi$, e C_2 é o segmento de extremidades $(-\pi, 0)$ e $(0, 0)$.