MAT3120 Cálculo Diferencial e Integral III - $1^{\underline{o}}$ Semestre de 2015

15/05/2015

Texto 2:
Algumas definições (Aplicações à Física)
e um enunciado do Teorema de Mudança de Variáveis

CUIDADO: Não revisado!

Placas planas

Seja $\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^2$ uma placa (subconjunto fechado e limitado) cuja fronteira $\partial\mathcal{P}$ tem conteúdo nulo. Se $\rho(x,y)$ é a densidade superficial de massa de $\mathcal{P}$ no ponto (x,y), tem-se

Área de $\mathcal{P}$	$\mathcal{A} = \int_{\mathcal{P}} dA$
Massa de $\mathcal{P}$	$\mathcal{M} = \int_{\mathcal{P}} \rho(x,y)dA$
Centro de massa $(\overline{x},\overline{y})$ de $\mathcal{P}$	$\mathcal{M}\,\overline{x} = \int_{\mathcal{P}}\ x\ \rho(x,y)dA$, $\mathcal{M}\,\overline{y} = \int_{\mathcal{P}}\ y\ \rho(x,y)dA$.
Centróide $(\overline{x},\overline{y})$ de $\mathcal{P}$ (é o centro de massa se ρ é constante $\neq 0$)	$\mathcal{A}\,\overline{x} = \int_{\mathcal{P}}\ xdA$, $\mathcal{A}\,\overline{y} = \int_{\mathcal{P}}\ ydA$.
Momento de Inércia de $\mathcal{P}$ em relação a um eixo ℓ	$I_\ell = \int_{\mathcal{P}}\ \delta^2(x,y)\ \rho(x,y)dA$, onde $\delta(x,y)$ é a distância do ponto (x,y) de $\mathcal{P}$ ao eixo ℓ

Sólidos

Seja $T \subset \mathbf{R}^3$ um sólido (subconjunto fechado e limitado) cuja fronteira ∂T tem conteúdo nulo. Se $\rho(x,y,z)$ é a densidade de massa de T no ponto (x,y,z), tem-se

Volume de T	$\mathcal{V} = \int_T dV$
Massa de T	$\mathcal{M} = \int_T \rho(x,y,z)dV$
Centro de massa $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ de T	$\mathcal{M}\,\overline{x} = \int_T\ x\ \rho(x,y,z)dV$, $\mathcal{M}\,\overline{y} = \int_T\ y\ \rho(x,y,z)dV$, $\mathcal{M}\,\overline{z} = \int_T\ z\ \rho(x,y,z)dV$.
Centróide $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ de T (é o centro de massa se ρ é constante $\neq 0$)	$\mathcal{V}\,\overline{x} = \int_T\ xdV$, $\mathcal{V}\,\overline{y} = \int_T\ ydV$, $\mathcal{V}\,\overline{z} = \int_T\ zdV$.
Momento de Inércia de T em relação a um eixo ℓ	$I_\ell = \int_T\ \delta^2(x,y,z)\ \rho(x,y,z)dV$, onde $\delta(x,y,z)$ é a distância do ponto (x,y,z) de T ao eixo ℓ
Momento de Inércia de T em relação a um plano L	$I_L = \int_T\ \delta^2(x,y,z)\ \rho(x,y,z)dV$, onde $\delta(x,y,z)$ é a distância do ponto (x,y,z) de T ao plano L

Mudança de Variáveis

Proposição 1 *(Fórmula de Mudança de Variáveis)*

Seja $\Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbf{R}^n$ *e seja* $\Phi : \Omega \to \mathbf{R}^n$ *de classe* C^1*, injetora, com* $\det J\Phi(u) \neq 0, \ \forall u \in \Omega$.

[Nessas condições, segue do Teor. F. Inversa que $\Phi(\Omega)$ *é um aberto de* $\mathbf{R}^n$ *e* $\Phi^{-1} : \Phi(\Omega) \to \Omega$ *é de classe* C^1*].*

Seja $S \subset \Phi(\Omega) \subset \mathbf{R}^n$ *um subconjunto fechado e limitado, cujo bordo* ∂S *tem conteúdo nulo, e seja* $R \subset \Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbf{R}^n$ *definido por* $R = \Phi^{-1}(S)$.

Nestas condições, se $f : S \to \mathbf{R}$ *é contínua e limitada então*

$$\int_S f(x) dx_1 \dots dx_n = \int_R f(\Phi(u)) |\det J\Phi(u)| du_1 \dots du_n.$$

Observação 1 Podemos olhar Φ como uma mudança de variáveis que transforma $R \subset \Omega$ em $S \subset \Phi(\Omega)$, pois Φ transforma $u \in \Omega$ em $x = \Phi(u) \in \Phi(\Omega)$.

Observação 2 A Fórmula de Mudança de Variáveis vale em condições um pouco mais gerais, como por exemplo para "Coordenadas Polares", "Coordenadas Esféricas", "Coordenadas Cilíndricas", em que tem-se

"injetividade de Φ e $\det J\Phi(u) \neq 0, \ \forall u \in \Omega$"

apenas no interior de R, e não em Ω.