São 7 GRUPOS de questões. Para a nota, serão consideradas 6 questões, que devem ser de 6 GRUPOS diferentes.

GRUPO A

Questão A - 1 (1.5 pontos) Seja $f : Q = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 1/n \text{ ou } y = 1/n, n \in \mathbf{N}, \\ x^2 + y^2, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Mostre que f é integrável. (b) Calcule $\iint_Q f(x, y) dA$. E justifique!

Questão A - 2 (2.0 pontos) Seja $T \subset \mathbf{R}^2$ o triângulo de vértices $(0, 1)$, $(2, 3)$ e $(4, 4)$, e seja $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x, y) = e^{x+y}$.

- (a) Mostre que f é integrável. (b) Calcule $\iint_T f(x, y) dA$. E justifique!

GRUPO B

Questão B - 1 (2.0 pontos) Decida se cada conjunto abaixo tem ou não conteúdo nulo, e justifique sua resposta.

- (a) Uma reta R em $\mathbf{R}^2$.
 (b) O contorno (fronteira) F de um disco de centro na origem e raio 1 em $\mathbf{R}^2$.

Questão B - 2 (2.0 pontos) Decida se cada conjunto abaixo tem ou não conteúdo nulo, e justifique sua resposta.

- (a) O quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ em $\mathbf{R}^2$, isto é, o conjunto
 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
 (b) O quadrado $[0, 1] \times [0, 1] \times \{1\}$ em $\mathbf{R}^3$, isto é, o conjunto
 $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1\}$.

GRUPO C

Questão C - 1 (1.5 pontos) Seja $f : Q = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} xyz, & \text{se } z \geq x + y, \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Mostre que existe $\iiint_Q f(x, y, z) dV$. (b) Calcule $\iiint_Q f(x, y, z) dV$. (Justifique.)

Questão C - 2 (1.5 pontos) Seja $T \subset \mathbf{R}^3$ o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, e seja $f : T \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

- (a) Mostre que existe $\iiint_Q f(x, y, z) dV$. (b) Calcule $\iiint_Q f(x, y, z) dV$. (Justifique.)

GRUPO D

Questão D - 1 (1.5 pontos) Seja $S \subset \mathbf{R}^2$ uma placa delgada limitada pelas curvas C_1, C_2, C_3 e C_4 de equações $y = 2 + x^3$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi$ respectivamente.

Seja $\rho(x, y) = y + 1$ a densidade superficial de massa dessa placa. Calcule sua massa.

Questão D - 2 (2.0 pontos) Considere, no plano xy , uma placa delimitada pelas curvas C_1, C_2, C_3 e C_4 onde

C_1 é o segmento ligando $A = (0, 0)$ a $B = (2, 0)$,

C_2 é a curva de equação $x = 2 + y^2$, com $0 \leq y \leq 1$,

C_3 é o segmento ligando $C = (2, 1)$ a $B = (3, 1)$,

C_4 é a curva de equação $x = 2y^2$, com $0 \leq y \leq 1$.

(a) Faça um esboço dessa placa no plano xy .

(b) Calcule a primeira coordenada $\bar{x}$ do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ dessa placa, sabendo que a densidade superficial de massa é dada por $\rho(x, y) = y + 1$.

GRUPO E

Questão E - 1 (1.5 pontos) Considere a pirâmide P cujos vértices são $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$, e suponha que sua densidade de massa é dada por $\rho(x, y, z) = x + 1$.

Calcule a massa dessa pirâmide.

Questão E - 2 (2.0 pontos) Calcule a massa do sólido $S \subset \mathbf{R}^3$ cuja densidade de massa é dada por $\rho(x, y, z) = yz + 1$, e S é o sólido limitado pela superfície $z = xy$ e os planos $y = 1$, $x = 1$ e $z = 0$.

GRUPO F

Questão F - 1 (1.0 ponto) Considere a placa quadrada $[0, 1] \times [0, 1]$ cuja densidade de massa é dada por $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Calcule o momento de inércia desse cubo em relação ao eixo dos x .

Questão F - 2 (1.0 ponto) Considere o cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ cuja densidade de massa é dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Calcule o momento de inércia desse cubo em relação ao eixo dos x .

Questão F - 3 (1.0 ponto) Considere o cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ cuja densidade de massa é dada por $\rho(x) = x^2 + y^2 + z^2$.

Calcule o momento de inércia desse cubo em relação ao plano xy .

GRUPO G

Questão G - 1 (2.0 pontos) Use coordenadas polares $(x, y) = \Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ para calcular

$$\int_S (x^2 + y^2) dx dy$$

onde $S \subset \mathbf{R}^2$ é a região do primeiro quadrante delimitada pelas hipérbolas $xy = 1$ e $xy = 2$ e pelas retas $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$

Questão G - 2 (2.0 pontos) Use coordenadas esféricas

$$(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \eta) = (r \sin \eta \cos \theta, r \sin \eta \sin \theta, r \cos \eta)$$

para calcular o volume da parte da bola de centro na origem e raio 2 que se encontra no primeiro octante.

Questão G - 3 (2.0 pontos) Use coordenadas cilíndricas

$$(x, y, z) = \Phi(r, \theta, u) = (r \cos \theta, r \sin \theta, u)$$

para calcular o volume da região do espaço xyz limitada inferiormente pelo plano xy , superiormente pela superfície parabólica $z = x^2 + 2y^2$, e lateralmente pela superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$.