MAT3120 Clculo Diferencial e Integral III - $1^{\underline{o}}$ Semestre de 2015

$1^{\underline{a}}$ PROVA - Peso 1 16/04/2015

Para a nota, será considerada apenas UMA questão de cada parte, num total de 5 questões.

PARTE A

Questão A - 1 (2.0 pontos) Seja $f : Q = [0,1] \times [0,3] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \notin \{1,2\}, \\ 0, & \text{se } y = 1, \\ 0, & \text{se } y = 2. \end{cases} \tag{1}$$

Apresente duas funções escada

$$s : Q = [0,1] \times [0,3] \to \mathbf{R} \text{ e } S : Q = [0,1] \times [0,3] \to \mathbf{R}$$

tais que

$$s(x) \le f(x) \le S(x), \forall\, x = (x_1, x_2) \in Q, \quad \text{e} \quad \iint_Q S(x)dA - \iint_Q s(x)dA < \tfrac{1}{4}.$$

Questão A - 2 (2.5 pontos) Seja $f : Q = [0,1] \times [0,3] \to \mathbf{R}$ dada por (1)

Seja $\epsilon > 0$.

Apresente duas funções escada

$$s_\epsilon : Q = [0,1] \times [0,3] \to \mathbf{R} \text{ e } S_\epsilon : Q = [0,1] \times [0,3] \to \mathbf{R}$$

tais que

$$s_\epsilon(x) \le f(x) \le S_\epsilon(x), \forall\, x = (x_1, x_2) \in Q, \quad \text{e} \quad \iint_Q S_\epsilon(x)dA - \iint_Q s_\epsilon(x)dA < \epsilon.$$

PARTE B

Questão B - 1 (1.5 ponto) Mostre que se $A \subset \mathbf{R}^2$ e $B \subset \mathbf{R}^2$ são dois conjuntos de conteúdo nulo, então $C = A \cup B$ tem conteúdo nulo.

Questão B - 2 (2.0 pontos) Mostre que se $A_1, A_2, \ldots, A_p$ são subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ de conteúdo nulo, então $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$ tem conteúdo nulo.

PARTE C

Questão C - 1 (1.5 pontos) Seja $f : Q = [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \le x, \\ x + y, & \text{se } y > x. \end{cases}$$

(a) Mostre que existe $\iint_Q f dA$. (b) Calcule $\iint_Q f dA$. E justifique!

Questão C - 2 (2.0 pontos) Seja $f : Q = [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{se } y \le x^2, \\ 1, & \text{se } y > x^2. \end{cases}$$

(a) Mostre que existe $\iint_Q f dA$. (b) Calcule $\iint_Q f dA$. E justifique!

Questão C - 3 (2.5 pontos)
Seja $f : Q = [0, 2] \times [0, e] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(u) = \begin{cases} 2, & \text{se } x_2 \geq e^{x_1}, \\ 1, & \text{se } x_2 < e^{x_1}. \end{cases}$$

(a) Mostre que existe $\iint\limits_Q f dA$.

(b) Calcule $\iint\limits_Q f dA$. E justifique!

PARTE D

Questão D - 3 (1.5 pontos)
Considere uma placa retangular no plano xy determinada por $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, cuja densidade superficial de massa dada por $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Calcule a massa dessa placa.

Questão D - 4 (2 pontos) Seja $S \subset \mathbf{R}^2$ uma placa delgada limitada por

$$y = 2 + \sin^2 x, \;\; y = 0, \;\; -\pi \leq x \leq \pi.$$

Seja $\rho(x, y) = y + 1$ a densidade (superficial) de massa dessa placa em cada ponto (x, y).

Calcule a massa dessa placa.

PARTE E

Questão E - 1 (2.0 pontos)
Calcule o volume do sólido no espaço xyz com base no plano $z = 0$, delimitado lateralmente pelos planos $x = 0, x = 2, y = 0$ e $y = 3$, e delimitado superiormente pelo gráfico da função $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dada por $z = f(x, y) = x^2 + y$.

Questão E - 2 (2.0 pontos) Uma pirâmide P está limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + 2y + 3z = 6$.

Faça um desenho do sólido obtido e calcule seu volume, usando a integral tripla

$$\text{vol } (P) = \iiint\limits_P dV.$$

Questão E - 3 (2.5 pontos) Considere a pirâmide P definida na questão 2, e suponha que sua densidade de massa é dada por $\rho(x, y, z) = x + 1$.

Calcule a massa dessa pirâmide.

Questão E - 4 (2.5 pontos) Calcule

$$\iiint\limits_S xy^2 z^3 dV$$

onde $S \subset \mathbf{R}^3$ é o sólido limitado pela superfície $z = xy$ e os planos $y = x, \;\; x = 1$ e $z = 0$.

PARTE F

Questão F - 1 (1.0 ponto) Suponha que $f : S \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ é uma função positiva, integrável em S, e que

$$\int_S f dV = \int_0^1 \Big[\int_0^y f(x, y) dx \Big] dy.$$

Trace um esboço de S e permute a ordem de integração.