MAT3120 Cálculo Diferencial e Integral III

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2015

$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - 22/03/2015

Entregar os exercícios 1, 4 e 5 até 27/03/2015

Observação: Esta é a lista mais teórica da disciplina, porquê ainda temos poucas ferramentas para o Cálculo de Integrais. Não se assustem com ela, enfrentem-na! Tentar fazê-la e tirar as dúvidas, neste momento, é até mais importante do que conseguir fazê-la!

GRUPO A

Exercício 1 Considere o conjunto

$X = \{x \in \mathbf{R} \mid x$ é natural par ou inverso de natural ímpar$\} \subset \mathbf{R}$.

(a) $X \neq \emptyset$? Por quê?

(b) X tem majorante? Por quê?

(c) Se a resposta de (b) for afirmativa, apresente dois majorantes de X, e diga quantos majorantes X tem.

(d) X tem minorante? Por quê?

(e) Se a resposta de (d) for afirmativa, apresente dois majorantes de X, e diga quantos majorantes X tem.

(f) X é limitado superiormente? Por quê?

(g) X tem supremo? Por quê? Se a resposta for afirmativa, diga quem é $\sup X$.

(h) X é limitado inferiormente? Por quê?

(i) X tem ínfimo? Por quê? Se a resposta for afirmativa, diga quem é $\inf X$.

Nota: $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.

Exercício 2 Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monótona crescente em $\mathbf{R}$, isto é,

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots.$$

Considere o conjunto dos V valores da sequência, isto é,

$$V = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}.$$

(a) Dê um exemplo em que V é um conjunto unitário.

(b) Dê um exemplo em que V é um conjunto com 2 elementos.

(c) Dê um exemplo em que V é um conjunto infinito não limitado superiormente.

(d) Dê um exemplo em que V é um conjunto infinito limitado superiormente.

(e) No exemplo (c), V tem supremo? Se sim, quem é $\sup V$?

(f) No exemplo (d), V tem supremo? Se sim, quem é $\sup V$?

GRUPO B

Para resolver estes exercícios, recomendo ler antes o **Texto 1**, disponível no PACA.

Exercício 3

Suponha que $f : Q = [a,b] \to \mathbf{R}$ limitada e que $s_n, S_n : Q = [a,b] \to \mathbf{R}$ funções escada tais que

$f(t) - \frac{1}{n} \leq s_n(t) \leq f(t)$, $\forall t \in [a,b]$

e

$f(t) \leq S_n(t) \leq f(t) + \frac{1}{n}$, $\forall t \in [a,b]$

(isto é,

$s_n(t)$ aproxima $f(t)$ por baixo, com erro $< \frac{1}{n}$ em todos os pontos de $[a,b]$, e
$S_n(t)$ aproxima $f(t)$ por cima, com erro $< \frac{1}{n}$ em todos os pontos de $[a,b]$).

Mostre que f é integrável.

Exercício 4 Seja $f : Q = [0,1] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(t) = t, \forall t \in [0,1]$.

Mostre que f é integrável e calcule $\int_Q f(t)dt$.

Sugestão: Use a Proposição 2 do **Texto 1** *e a observação que a segue.*

Exercício 5 Seja $f : Q = [0,1] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(t) = t^2, \forall t \in [0,1]$.

Fixado $n \in \mathbf{N}$, divida o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos Q_i de mesmo comprimento, $Q_i = [t_{i-1}, t_i] = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], i = 1, 2, \ldots, n$.

Considere $s_n : Q = [0,1] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $S_n : Q = [0,1] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definidas por

$$s_n(t) = \begin{cases} f(t_{i-1}), & \text{se } t \in]t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

$$S_n(t) = \begin{cases} f(t_i), & \text{se } t \in]t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

(a) Calcule $t_0, t_1, \ldots, t_n$.

(b) Esboce o gráfico de $y = f(t)$, de $y = s_1(t)$ e de $y = S_1(t)$ num mesmo plano ty.

(c) Esboce o gráfico de $y = f(t)$, de $y = s_2(t)$ e de $y = S_2(t)$ num mesmo plano ty.

(d) Esboce o gráfico de $y = f(t)$, de $y = s_n(t)$ e de $y = S_n(t)$ num mesmo plano ty.

(e) Justifique a afirmação:

"s_n é função escada por baixo de f, e S_n é função escada por cima de f."

(f) Calcule:

$\int\limits_Q s_n(t)dt$,

$\int\limits_Q S_n(t)dt$, e

$\int\limits_Q S_n(t)dt - \int\limits_Q s_n(t)dt$.

Nota: $0^2 + 1^2 + 2^2 + k^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$.

(g) Justifique a afirmação:

"f é integrável em $Q = [0,1]$."

Exercício 6 Seja $f : Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \leq x \\ 0, & \text{se } y > x. \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de $z = f(x,y)$.

Fixado $n \in \mathbf{N}$, divida o intervalo $[0,1]$ dos x e o intervalo $[0,1]$ dos y em n subintervalos de mesmo comprimento, de modo que o quadrado Q fique coerentemente dividido em n^2 subquadrados Q_{ij} de mesma área.

(b) Represente Q no plano xy e os subquadrados Q_{ij} no caso em que $n = 2$. Quais são os subquadrados Q_{ij} cujos interiores ficam na região $y < x$? E quais são os subquadrados Q_{ij} cujos interioresinterceptam a reta $y = x$?

(c) Represente Q no plano xy e os subquadrados Q_{ij} no caso em que $n = 3$. Quais são os subquadrados Q_{ij} cujos interiores ficam na região $y < x$? E quais são os subquadrados Q_{ij} cujos interioresinterceptam a reta $y = x$?

(d) Represente Q no plano xy e os subquadrados Q_{ij} para n genérico. Quais são os subquadrados Q_{ij} cujos interiores ficam na região $y < x$? E quais são os subquadrados Q_{ij} cujos interioresinterceptam a reta $y = x$?

Considere $s_n : Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ e $S_n : Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definidas por

$$s_n(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in Q_{ij}^o \text{ e } Q_{ij}^o \text{ está contido na região } y < x, \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

$$S_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in Q_{ij}^o \text{ e } Q_{ij}^o \text{ está contido na região } y < x, \\ 1, & \text{se } t \in Q_{ij}^o \text{ e } Q_{ij}^o \text{ intercepta a reta } y = x, \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

(e) s_n é função escada por baixo de f? E S_n é função escada por cima de f?

(f) Calcule:

(i) $\int\limits_Q s_n(x,y)dA$,

(ii) $\int\limits_Q S_n(x,y)dA$,

(iii) $\int\limits_Q S_n(x,y)dA - \int\limits_Q s_n(x,y)dA$.

(g) Justifique a afirmação:

"*f é integrável em $Q = [0,1] \times [0,1]$.*"