

Texto 1:
Ferramentas iniciais para decidir sobre integrabilidade
e para aproximar integrais

CUIDADO: Não revisado!

1. Notações

No que segue, usaremos as notações

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset \mathbf{R}^k,$$

$$f : Q \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R} \text{ limitada,}$$

$$s : Q \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R} \text{ função escada "abaixo de" } f,$$

$$S : Q \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R} \text{ função escada "acima de" } f.$$

Também usaremos as notações:

$$dV = dt, \text{ ou } dV = dx, \text{ ou } dV = dl, \text{ quando } k = 1,$$

$$dV = dA, \text{ quando } k = 2.$$

2. Resultados

Vimos em sala que:

Proposição 1

Se

1o.) Para $\epsilon > 0$ conseguirmos encontrar função escada s_ϵ por baixo de f e função escada S_ϵ por cima de f tais que

$$0 \leq \int_Q \dots \int S_\epsilon(x) dV - \int_Q \dots \int s_\epsilon(x) dV < \epsilon,$$

2o.) Isso puder ser encontrado para cada $\epsilon > 0$,
então

(i) f é integrável em Q .

$$(ii) \int_Q \dots \int s_\epsilon(x) dV \leq \int_Q \dots \int f(x) dV \leq \int_Q \dots \int S_\epsilon(x) dV.$$

$$(iii) 0 \leq \int_Q \dots \int S_\epsilon(x) dV - \int_Q \dots \int f(x) dV < \epsilon.$$

$$(iv) 0 \leq \int_Q \dots \int f(x) dV - \int_Q \dots \int s_\epsilon(x) dV < \epsilon.$$

Note que na proposição acima:
 $\int_Q \dots \int_Q S_\epsilon(x) dV$ é uma aproximação “por excesso” de $\int_Q \dots \int_Q f(x) dV$ com erro $< \epsilon$,
 $\int_Q \dots \int_Q s_\epsilon(x) dV$ é uma aproximação “por falta” de $\int_Q \dots \int_Q f(x) dV$ com erro $< \epsilon$.

Da mesma forma:

Proposição 2

Se:

- 1o.) Para $n \in \mathbf{N}$ conseguirmos encontrar função escada s_n por baixo de f e função escada S_n por cima de f tais que

$$0 \leq \int_Q \dots \int_Q S_n(x) dV - \int_Q \dots \int_Q s_n(x) dV < e_n,$$

- 2o.) Isso puder ser encontrado para cada $n \in \mathbf{N}$, e
 $e_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$,

então

- (i) f é integrável em Q .
- (ii) $\int_Q \dots \int_Q s_n(x) dV \leq \int_Q \dots \int_Q f(x) dV \leq \int_Q \dots \int_Q S_n(x) dV$.
- (iii) $0 \leq \int_Q \dots \int_Q S_n(x) dV - \int_Q \dots \int_Q f(x) dV < e_n$.
- (iv) $0 \leq \int_Q \dots \int_Q f(x) dV - \int_Q \dots \int_Q s_n(x) dV < e_n$.

Note que na proposição acima:
 $\int_Q \dots \int_Q S_n(x) dV$ é uma aproximação “por excesso” de $\int_Q \dots \int_Q f(x) dV$ com erro $< e_n$,
 $\int_Q \dots \int_Q s_n(x) dV$ é uma aproximação “por falta” de $\int_Q \dots \int_Q f(x) dV$ com erro $< e_n$.
 $\int_Q \dots \int_Q f(x) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \dots \int_Q s_n(x) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \dots \int_Q S_n(x) dV$.