MAP 131 - LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA APLICADA

Cuidado: Texto no revisado!

INTRODUÇÃO

Algumas coisas são tão *naturais* que estamos acostumados a nem pensar acerca delas, por exemplo, que diabo de coisa é o número π? Aliás, π é número? Qual?

Uma resposta do tipo π é *aproximadamente* 3.1415 precisa, para ter algum valor, ser acompanhada de dois pequenos complementos.

Em primeiro lugar, é preciso explicitar: *quais as contas que levam a essa conclusão*? Ou, em outras palavras, como é que se **calcula** essa *aproximação* de π?

A segunda coisa que precisa ser esclarecida para a frase acima poder ser aceitada como resposta é: *quão boa é essa aproximação*?

Tentaremos nesta primeira aula apresentar alguma resposta acerca de π que não tenha os problemas apresentados acima.

UM PONTO DE PARTIDA

Para ter alguma esperança de calcular uma aproximação de π é preciso primeiramente ter alguma idéia do que é que estamos a procurar. Em outras palavras, o que é π?

Há, por incrível que pareça, uma *definição* de π e, inacreditável, essa definição, serve até para obter uma aproximação desse misterioso cidadão. Ei–la!

Definição: *O número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.*

Uma questão que pode (e deve) ser levantada nesta altura é se a definição acima de fato define alguma coisa. Explicando, afirma–se ali que π é o resultado da divisão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Ora bem, alguém pode muito propriamente perguntar, *de qual circunferência?*

Esta é, de fato, uma boa pergunta, e nós vamos aproveitar para introduzir aqui uma boa e saudável prática, responderemos a essa pergunta na forma de um meio–exercício, isto é, daremos a resposta mas não *provaremos* nossa afirmação, isso fica por sua conta (bem, quando isso acontecer e você tiver dificuldades para fazê–lo, não desanime, a coisa pode ser difícil mesmo! Vá procurar o professor ou o monitor depois da aula e conte–lhe isso, no mínimo você descobre que a coisa é difícil mesmo. . .).

Então, lá vai a resposta à pergunta feita. Não tem nenhuma importância qual é a circunferência que você escolher para *calcular* π usando a definição acima, isto por que vale o seguinte:

Qualquer que seja a circunferência que se escolha, o resultado da divisão entre o comprimento desta e seu diâmetro não varia.
Exercício: Prove a afirmação acima.

Assim, uma maneira de *calcular* π é, desenhar uma circunferência de raio 1, e "medir" seu comprimento. Este comprimento é exatamente 2π.

Dessa forma, vemos que o comprimento da semi–circunferência de raio 1 é π.

Um pequeno detalhe é representado pelo fato de que não conhecemos nenhuma maneira "exata" de medir o comprimento de uma circunferência ou semi–circunferência!

Mas agora temos um problema do qual podemos tentar obter um método prático para obter uma aproximação de sua solução.

UM MÉTODO PARA "MEDIR" O COMPRIMENTO DA SEMI–CIRCUNFERÊNCIA

Vamos apresentar uma maneira de obter uma boa aproximação para o comprimento da semi–circunferência de raio 1, ou seja, π.

Esse método consiste em calcular o perímetro do polígono regular de 2^n lados inscrito nessa circunferência ($n = 2, 3, 4, \ldots$) e considerar a metade desse perímetro como uma aproximação de π.

Postergueemos um pouco a análise acerca da qualidade dessa aproximação e concentre–mo–nos no cálculo do perímetro do polígono regular de 2^n lados incrito na circunferência de raio 1, chamemos a esse perímetro p_n e denotemos por α_n a medida do ângulo obtido quando dividimos a circunferência em 2^n partes iguais, isto é, $\alpha_n = \frac{360}{2^n}^\circ$.

Se ℓ_n é a medida do lado desse polígono, então $p_n = 2^n \ell_n$. Dessa forma, nosso problema é calcular ℓ_n.

Para isso comecemos estabelecendo um fato simples.

Proposição 1: *Para* $n \geq 2$ *temos* $\ell_n^2 = 2 - 2\cos\alpha_n$.
Dem.: Feita na sala. ■

Com isto aparentemente o problema poderia ser dado como encerrado, porém nós vamos ser alguém poderia objetar que como não sabemos o valor de $\cos\alpha_n$ isto não é verdade.

Para evitar esta pequena objeção metafísica (seja lá o que for isso) veja que, como $\alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{2}$ e $\cos\alpha_2 = \cos(90°) = 0$, com um pouco mais de trigonometria obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$\cos\alpha_2 = 0,\ \cos\alpha_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha_n}{2}}$$

Dessa forma fica claro que para calcular ℓ_n não é necessário usar tabela de funções trigonométricas (e assim não precisamos ter qualquer preocupação se na confecção dessa tabela teria sido usado o valor de π).

Aliás, para espíritos mais "sintetizadores" podemos com um pouco mais de manipulação elementar chegar à seguinte relação que evita até o uso da função cosseno.

Proposição 2: *Os números $\ell_n,\ n \geq 2$ satisfazem a seguinte relação:*

$$\ell_2 = \sqrt{2},\ \ell_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}.$$

Dem.: Faça como exercício. ∎

Assim, usando estas relações calculamos $p_n = 2^n \ell_n$ e fazendo "n bastante grande" podemos ter uma aproximação de π dada por

$$\pi \sim \frac{p_n}{2} = 2^{n-1}\ell_n.$$

Construindo uma tabela dos valores de p_n calculados "manualmente" obtemos a seguinte tabela de aproximações de π.

n	ℓ_n	$\sim \pi$
2	1.4142135	2.828427
3	0.7652669	3.0674676
4	0.3901807	3.1214456
5	0.1960344	3.1365504
6	0.0981356	3.1403392
7	...	...
8	...	...
9	...	...

Exercício: Completar a tabela acima.

Bem, resta a questão de saber quão boa é a aproximação de π na tabela acima, por exemplo, na sexta linha.

Talvez você já tenha visto algum desenho de um polígono de $2^6 = 64$ lados inscrito em uma circunferência de raio 1 e por isso ache "óbvio" que a aproximação acima é "razoável". Dentro dessa linha de raciocínio talvez seja ainda mais "evidente" que quando n aumenta, o valor de $2^{n-1}p_n$ aproxima–se cada vez mais de π.

Em matemática as coisas não funcionam exatamente dessa maneira, por mais "evidente" e "óbvias" que certas coisas pareçam elas precisam ser justificadas, como se diz no jargão matemático, demonstradas. Esta prática pode parecer "chata" ou "cri–cri" mas sua utilidade ao longo da história é razão suficiente para que hoje ninguém pense em abrir mão dela.

Então vamos esquecer o famoso "está na cara" e voltar ao trabalho!

Algumas coisas são de comprovação imediata, por exemplo:

- Os números p_n formam uma seqüência crescente, ou seja, $p_{n+1} > p_n$.
- Os números p_n são todos menores do que 8.

Exercício: Prove as afirmações acima.

Alguém poderia dizer que a última afirmação poderia ser "melhorada" dizendo que $p_n < 2\pi$.

Bom, não resta dúvida de que a desigualdade estabelecida é verdadeira (por quê?), quanto à parte do "melhorada" a situação é um pouco mais complicada.

Exercício: Mostre que $\pi < 4$ (ou seja, $2\pi < 8$).

Neste ponto podemos portanto afirmar sem medo de erro que, qualquer que seja o valor de n, é verdade que $p_n < \pi < 4$.

Exercício: Tente melhorar a estimativa acima (por exemplo, você consegue provar que $\pi < 3.5$?)

Por enquanto vamos suspender esta discussão (prometemos voltar a ela mais tarde) e tentemos outros caminhos para obter aproximações de π.

OUTRA MANEIRA DE "CALCULAR" π

Uma propriedade bastante conhecida que também serve ao propósito de obter uma aproximação de π é a de que a área do círculo unitário é π.

Neste caso nosso problema resume–se a encontrar algum método "prático" que sirva para calcular a área de um círculo de raio 1.

Vamos apresentar vários métodos para isto.

O Método da exaustão de Arquimedes:

A idéia aqui é aproximar a área do círculo pela soma da área de retângulos que se "aproximem" do referido círculo.

Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ e o círculo que ela delimita.

É claro que o raio desse círculo é 1 e que sua área é o dobro da área do semi–círculo $\{(x;y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$. É exatamente a área deste semi–círculo que pretendemos aproximar através da seguinte construção.

Divida a base desse semi–círculo (o segmento $\{(x;0) \colon -1 \leq x \leq 1\}$) em n partes iguais ($n \geq 3$), ou seja, em n segmentos de reta, cada um deles de comprimento $\frac{2}{n}$.

Ordenem os pontos que são extremidades desses segmentos segundo sua abscissa e denote–os $P_0 = (-1;0),\ P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n = (1;0)$.

Para cada segmento $P_j P_{j+1},\ 1 \leq j \leq n-2$ considere o retângulo contido no semi–círculo cuja base é esse segmento e que possui pelo menos um vértice na semi–circunferência $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ (veja a figura abaixo, feita para $n = 3$ e $n = 4$ e veja por que j varia nesse intervalo).

Se a_j é a área desse retângulo vamos aproximar a área do semi–círculo por

$$s_n = \sum_{j=1}^{n-2} a_j.$$

A "esperança" é que, quando n fica sufucientemente grande, $2s_n$ seja uma boa aproximação para π.

Para este objetivo é claro que podemos nos restringir ao caso em que n é ímpar e, por comodidade, assim o faremos.

Obtemos assim a

Proposição: *Seja n um natural ímpar maior ou igual a três. Então*

$$s_n = \frac{4}{n^2} \sum_{p=1}^{\frac{n-3}{2}} \sqrt{n^2 - (2p+1)^2} + \frac{2}{n^2}\sqrt{n^2 - 1}.$$

Dem.: Faça como exercício. ■

Exercício: Obter uma fórmula similar a esta para o caso em que n é par.

Para termos uma idéia do tipo de aproximações obtidas desta maneira, apresentamos a tabela abaixo.

Outra vez devemos nos preocupar sobre a qualidade da aproximação obtida, isto é, com uma estimativa do erro que cometemos ao aproximar a área do semi–círculo por s_n.

Desta vez temos uma maneira mais direta de fazer esta estimativa.

Veja que, como os retângulos considerados ficavam *dentro* do semi–círculo temos que s_n é uma aproximação por falta da área dessa figura, isto é, $s_n < \frac{\pi}{2}$.

Se tomarmos agora retângulos que "englobem" partes do semi–círculo e depois somarmos as áreas destes teremos uma aproximação de $\frac{\pi}{2}$ por excesso.

Para obter esses retângulos cuja reunião conterá o semi–círculo consideremos outra vez, para $n \geq 3$, os pontos $P_0, \ P_1, \ \ldots, \ P_n$ tomados antes, e agora para cada segmento $P_jP_{j+1}, \ j = 0, 1, \ldots, n-1$ (desta vez vamos tomar todos os segmentos!) e vamos pegar o retângulo de base nesse segmento que deixe o arco P_jP_{j+1} dentro dele e que tenha **a menor área possível** (veja na figura abaixo a contrução desse processo para $n = 4$).

Se, para $0 \leq j \leq n-1, \ A_j$ é a área do retângulo assim obtido então

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} A_j$$

é uma aproximação por excesso de $\frac{\pi}{2}$, o que nos permite escrever

$$s_n < \frac{\pi}{2} < S_n.$$

Esta expressão extremamente ingênua tem uma conseqüência interessante.

Proposição: *Para todo $n \geq 3$ fazendo $M_n = \frac{s_n + S_n}{2}$ e $\varepsilon_n = S_n - s_n$ temos*

$$|M_n - \pi| < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Dem.: Imediata (faça como exercício). ■