

Computação Musical - Áudio Digital

slides do curso MAC0337/5900 - Computação Musical,
baseados no capítulo 2 do livro de F. Richard Moore
Elements of Computer Music

Marcelo Queiroz

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Versão de 06/10/2014

Sinais e filtros

Vamos considerar agora sinais em tempo discreto, mas não necessariamente de comprimento finito.

Sinais e filtros

Vamos considerar agora sinais em tempo discreto, mas não necessariamente de comprimento finito. Dado um sinal de tempo finito $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ podemos estendê-lo para um sinal de tempo infinito por

- repetição periódica: $x_n = x_{n \bmod N}, \forall n \in \mathbb{Z}$; e
- completamento com zeros (*zero-padding*):
 $x_n = 0, \forall n \notin \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Definição e exemplo

Filtro é qualquer processamento T que tome um sinal em tempo discreto x e produza como resposta um outro sinal $y = T[x]$, definido univocamente para cada x .

Definição e exemplo

Filtro é qualquer processamento T que tome um sinal em tempo discreto x e produza como resposta um outro sinal $y = T[x]$, definido univocamente para cada x .

Exemplo: Considere $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, estendido periodicamente e com DFT X , e y obtido como

$$y = \left(\frac{x_0 + x_{-1}}{2}, \frac{x_1 + x_0}{2}, \frac{x_2 + x_1}{2}, \dots, \frac{x_{N-1} + x_{N-2}}{2} \right),$$

Definição e exemplo

Filtro é qualquer processamento T que tome um sinal em tempo discreto x e produza como resposta um outro sinal $y = T[x]$, definido univocamente para cada x .

Exemplo: Considere $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, estendido periodicamente e com DFT X , e y obtido como

$$y = \left(\frac{x_0 + x_{-1}}{2}, \frac{x_1 + x_0}{2}, \frac{x_2 + x_1}{2}, \dots, \frac{x_{N-1} + x_{N-2}}{2} \right),$$

ou equivalentemente,

$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1)).$$

Exemplo: filtro da média

Indicando por $\text{shift}(x, -1)$ o vetor $(x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{N-2})$, temos

$$y = \frac{1}{2}(x + \text{shift}(x, -1)).$$

Exemplo: filtro da média

Indicando por $\text{shift}(x, -1)$ o vetor $(x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{N-2})$, temos

$$y = \frac{1}{2}(x + \text{shift}(x, -1)).$$

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{1}{2}(X_k + \text{DFT}_k(\text{shift}(x, -1))) \\ &= \frac{1}{2}(X_k + e^{-i2\pi k/N} X_k) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-i2\pi k/N}) X_k. \end{aligned}$$

A constante complexa $H_k = \frac{1}{2}(1 + e^{-i2\pi k/N})$ é denominada *resposta em frequência deste filtro*

Filtro da média: análise da resposta

Simetrizando a última expressão

$$\begin{aligned}H_k &= \frac{1}{2}(1 + e^{-i2\pi k/N}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-i\pi k/N}(e^{i\pi k/N} + e^{-i\pi k/N})\end{aligned}$$

Filtro da média: análise da resposta

Simetrizando a última expressão

$$\begin{aligned}H_k &= \frac{1}{2}(1 + e^{-i2\pi k/N}) \\&= \frac{1}{2}e^{-i\pi k/N}(e^{i\pi k/N} + e^{-i\pi k/N}) \\&= e^{-i\pi k/N} \cos(\pi k/N),\end{aligned}$$

Filtro da média: análise da resposta

Simetrizando a última expressão

$$\begin{aligned}
 H_k &= \frac{1}{2}(1 + e^{-i2\pi k/N}) \\
 &= \frac{1}{2}e^{-i\pi k/N}(e^{i\pi k/N} + e^{-i\pi k/N}) \\
 &= e^{-i\pi k/N} \cos(\pi k/N),
 \end{aligned}$$

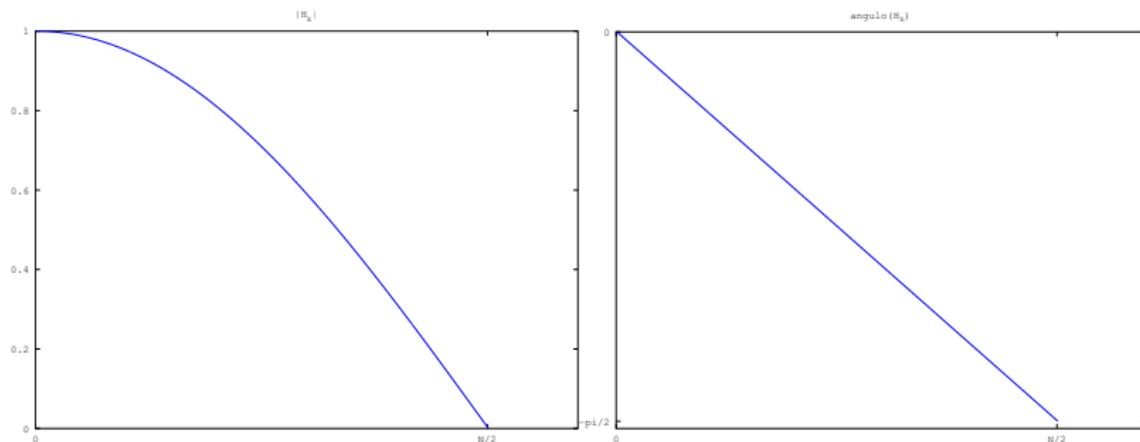
e portanto

$$|H_k| = |e^{-i\pi k/N}| \cdot |\cos(\pi k/N)| = \cos(\pi k/N), \quad k = 0, \dots, N/2$$

e

$$\angle H_k = -\pi k/N$$

Filtro da média: respostas em magnitude e fase



Podemos observar a ação deste filtro como um atenuador de frequências altas, o que caracteriza a família de filtros do tipo *passa baixas*.

Filtro da média: caracterização por convolução

Podemos observar que a expressão $y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(n - 1))$ corresponde à convolução de x com $h = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$:

Filtro da média: caracterização por convolução

Podemos observar que a expressão $y(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1))$ corresponde à convolução de x com $h = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$:

$$\begin{aligned}(x * h)(n) &= \sum_m x(m)h(n-m) \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1)) = y(n).\end{aligned}$$

Filtro da média: caracterização por convolução

Note que h coincide a resposta do filtro no caso da entrada x ser o impulso discreto

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = (x * h) = (\delta * h) = h.$$

Filtro da média: caracterização por convolução

Note que h coincide a resposta do filtro no caso da entrada x ser o impulso discreto

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = (x * h) = (\delta * h) = h.$$

h é denominada resposta (do filtro) ao impulso.

Filtro da média: teorema da convolução

Usando o teorema da convolução concluímos que $Y = HX$ onde

$$H_k = \sum_m h(m)e^{-i2\pi km/N}$$

Filtro da média: teorema da convolução

Usando o teorema da convolução concluímos que $Y = HX$ onde

$$\begin{aligned}H_k &= \sum_m h(m)e^{-i2\pi km/N} \\ &= h(0)e^0 + h(1)e^{-i2\pi k/N}\end{aligned}$$

Filtro da média: teorema da convolução

Usando o teorema da convolução concluímos que $Y = HX$ onde

$$\begin{aligned}H_k &= \sum_m h(m)e^{-i2\pi km/N} \\ &= h(0)e^0 + h(1)e^{-i2\pi k/N} \ . \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-i2\pi k/N})\end{aligned}$$

que corresponde exatamente ao resultado anterior.

Filtro da média: composição de filtros

Podemos aplicar vários filtros em série ao mesmo sinal.

Filtro da média: composição de filtros

Podemos aplicar vários filtros em série ao mesmo sinal. No caso de uma aplicação dupla do filtro da média, teríamos

$y = (x * h) * h = x * (h * h) = x * \hat{h}$, onde

$$\hat{h} = h * h = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0 \right),$$

Filtro da média: composição de filtros

Podemos aplicar vários filtros em série ao mesmo sinal. No caso de uma aplicação dupla do filtro da média, teríamos

$$y = (x * h) * h = x * (h * h) = x * \hat{h}, \text{ onde}$$

$$\hat{h} = h * h = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0 \right),$$

que corresponde à expressão

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2).$$

Filtro da média: composição de filtros

Podemos aplicar vários filtros em série ao mesmo sinal. No caso de uma aplicação dupla do filtro da média, teríamos

$$y = (x * h) * h = x * (h * h) = x * \hat{h}, \text{ onde}$$

$$\hat{h} = h * h = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0 \right),$$

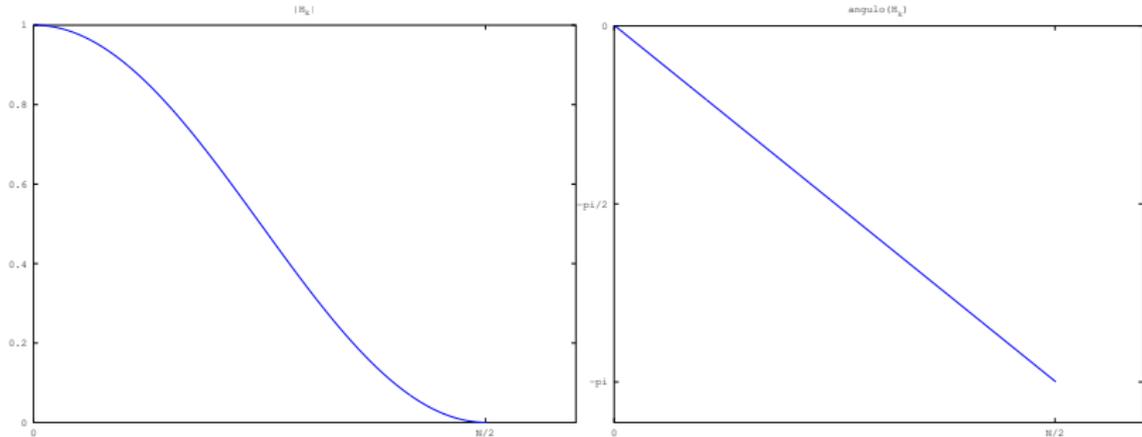
que corresponde à expressão

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2).$$

O espectro resultando será então $X\hat{H}$ onde

$$\hat{H}_k = H_k H_k = H_k^2 = e^{-i2\pi k/N} \cos^2(\pi k/N).$$

Filtro da média composto: respostas em magnitude e fase



Aqui o efeito passa-baixas é intensificado pelo decaimento quadrático da resposta em magnitude.

Exemplo: filtro de diferenças

Considere agora

$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(n-1)) = \frac{1}{2}(x + \text{shift}(x, -1)).$$

Exemplo: filtro de diferenças

Considere agora

$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(n-1)) = \frac{1}{2}(x + \text{shift}(x, -1)).$$

Temos que $Y = HX$ onde

$$h = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots, 0 \right).$$

Exemplo: filtro de diferenças

Considere agora

$$y(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(n-1)) = \frac{1}{2}(x + \text{shift}(x, -1)).$$

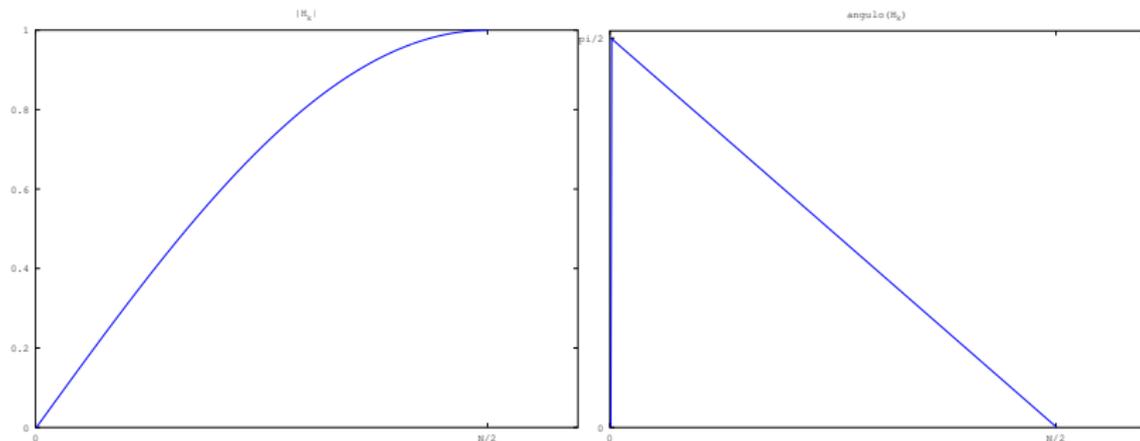
Temos que $Y = HX$ onde

$$h = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots, 0 \right).$$

$$\begin{aligned} H_k &= \sum_m h(m) e^{-i2\pi km/N} = h(0)e^0 + h(1)e^{-i2\pi k/N} \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-i2\pi k/N}) = \frac{1}{2} e^{-i\pi k/N} (e^{i\pi k/N} - e^{-i\pi k/N}) \\ &= e^{-i\pi k/N} \text{sen}(\pi k/N) \end{aligned}$$

$$|H_k| = |e^{-i\pi k/N}| \cdot |\text{sen}(\pi k/N)| = \text{sen}(\pi k/N), \quad k = 0, \dots, N/2$$

Filtro de diferenças: resposta em magnitude e fase



Podemos observar a ação deste filtro como um atenuador de frequências baixas, o que caracteriza a família de filtros do tipo *passa altas*.

Avaliação dos exemplos

- Vimos que os filtros de média e de diferenças correspondem às ações de *passa-baixas* e *passa-altas* respectivamente.

Avaliação dos exemplos

- Vimos que os filtros de média e de diferenças correspondem às ações de *passa-baixas* e *passa-altas* respectivamente.
- Queremos uma teoria que permita prever e controlar o comportamento dos filtros em relação a suas respostas em frequência.

Avaliação dos exemplos

- Vimos que os filtros de média e de diferenças correspondem às ações de *passa-baixas* e *passa-altas* respectivamente.
- Queremos uma teoria que permita prever e controlar o comportamento dos filtros em relação a suas respostas em frequência.
- A ferramenta mais útil para essa tarefa é a transformada z.

Propriedades de Filtros

Seja $y = T[x]$ o sinal produzido com a entrada x .

Propriedades de Filtros

Seja $y = T[x]$ o sinal produzido com a entrada x .

Linearidade: Para quaisquer sinais x_1 e x_2 ,
se $T[x_1] = y_1$ e $T[x_2] = y_2$, então

$$T[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha T[x_1] + \beta T[x_2] = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Propriedades de Filtros

Seja $y = T[x]$ o sinal produzido com a entrada x .

Linearidade: Para quaisquer sinais x_1 e x_2 ,
se $T[x_1] = y_1$ e $T[x_2] = y_2$, então

$$T[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha T[x_1] + \beta T[x_2] = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Invariância no tempo: Para qualquer sinal x_1 e $k \in \mathbb{Z}$ fixo,
sendo x_2 o sinal definido por $x_2(n) = x_1(n - k)$, $\forall n$,
se $T[x_1] = y_1$ e $T[x_2] = y_2$, então temos

$$y_2(n) = y_1(n - k).$$

Propriedades de Filtros

Seja $y = T[x]$ o sinal produzido com a entrada x .

Linearidade: Para quaisquer sinais x_1 e x_2 ,
se $T[x_1] = y_1$ e $T[x_2] = y_2$, então

$$T[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha T[x_1] + \beta T[x_2] = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Invariância no tempo: Para qualquer sinal x_1 e $k \in \mathbb{Z}$ fixo,
sendo x_2 o sinal definido por $x_2(n) = x_1(n - k)$, $\forall n$,
se $T[x_1] = y_1$ e $T[x_2] = y_2$, então temos

$$y_2(n) = y_1(n - k).$$

→ Filtros LTI (*Linear Time-Invariant*)

Exemplo: filtro acumulador/integrador

Seja $T[x] = y$ onde $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$.

Exemplo: filtro acumulador/integrador

Seja $T[x] = y$ onde $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$.

Se $y_k(n) = \sum_{m=-\infty}^n x_k(m)$, $k = 1, 2$, e $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$,

então $T[x_3] = T[\alpha x_1 + \beta x_2] = y_3$

Exemplo: filtro acumulador/integrador

Seja $T[x] = y$ onde $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$.

Se $y_k(n) = \sum_{m=-\infty}^n x_k(m)$, $k = 1, 2$, e $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$,

então $T[x_3] = T[\alpha x_1 + \beta x_2] = y_3$, onde

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \sum_{m=-\infty}^n x_3(m) = \sum_{m=-\infty}^n \alpha x_1(m) + \beta x_2(m) \\ &= \alpha \sum_{m=-\infty}^n x_1(m) + \beta \sum_{m=-\infty}^n x_2(m) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n), \end{aligned}$$

ou seja $T[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha T[x_1] + \beta T[x_2]$

Exemplo: filtro acumulador/integrador

Além disso T é invariante no tempo, pois
se $T[x_1] = y_1$, $x_2(n) = x_1(n - k)$ e $T[x_2] = y_2$

Exemplo: filtro acumulador/integrador

Além disso T é invariante no tempo, pois se $T[x_1] = y_1$, $x_2(n) = x_1(n - k)$ e $T[x_2] = y_2$, então

$$\begin{aligned}y_2(n) &= \sum_{m=-\infty}^n x_2(m) = \sum_{m=-\infty}^n x_1(m - k) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{n-k} x_1(m) \\ &= y_1(n - k).\end{aligned}$$

Exemplo: filtros não-lineares e variantes no tempo

Filtro de *clipping*:

$$y(n) = \max(-\alpha, \min(\alpha, x(n)))$$

Exemplo: filtros não-lineares e variantes no tempo

Filtro de *clipping*:

$$y(n) = \max(-\alpha, \min(\alpha, x(n)))$$

“Filtro” RMS:

$$\text{rms}(x) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x(n-i))^2}$$

Exemplo: filtros não-lineares e variantes no tempo

Filtro de *clipping*:

$$y(n) = \max(-\alpha, \min(\alpha, x(n)))$$

“Filtro” RMS:

$$\text{rms}(x) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x(n-i))^2}.$$

Filtro de compressão temporal:

$$y(n) = x(Mn), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Propriedade: elemento neutro da convolução

Todo sinal satisfaz $x = x * \delta$:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m),$$

Propriedade: elemento neutro da convolução

Todo sinal satisfaz $x = x * \delta$:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m),$$

logo

$$x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta_m$$

onde $\delta_m(n) = \delta(n-m)$.

Filtro LTI \implies Filtro de Convolução

Seja T LTI e suponha $T[\delta] = h$, onde h é a resposta ao impulso.

Filtro LTI \implies Filtro de Convolução

Seja T LTI e suponha $T[\delta] = h$, onde h é a resposta ao impulso.
Sendo $y = T[x]$, por linearidade

$$y = T \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta_m \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta_m],$$

Filtro LTI \implies Filtro de Convolução

Seja T LTI e suponha $T[\delta] = h$, onde h é a resposta ao impulso. Sendo $y = T[x]$, por linearidade

$$y = T \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta_m \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta_m],$$

e pela invariância no tempo, $T[\delta_m] = h(n - m)$,

Filtro LTI \implies Filtro de Convolução

Seja T LTI e suponha $T[\delta] = h$, onde h é a resposta ao impulso. Sendo $y = T[x]$, por linearidade

$$y = T \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta_m \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta_m],$$

e pela invariância no tempo, $T[\delta_m] = h(n - m)$, de onde

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n - m) \quad \equiv \quad y = x * h.$$

No domínio espectral teremos $Y = HX$, onde H é a resposta em frequência do filtro.

Estabilidade de filtros

T é *estável* quando, $\forall x$ limitado, $y = T[x]$ também é limitado:

$$\exists B_x > 0 : |x(n)| \leq B_x, \forall n \implies \exists B_y : |y(n)| \leq B_y, \forall n.$$

Estabilidade de filtros

T é estável quando, $\forall x$ limitado, $y = T[x]$ também é limitado:

$$\exists B_x > 0 : |x(n)| \leq B_x, \forall n \implies \exists B_y : |y(n)| \leq B_y, \forall n.$$

No caso LTI, se $|x(n)| \leq B_x, \forall n$ então

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \right| \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)||h(n-m)| \leq B_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(n-m)| \end{aligned}$$

Estabilidade de filtros

T é estável quando, $\forall x$ limitado, $y = T[x]$ também é limitado:

$$\exists B_x > 0 : |x(n)| \leq B_x, \forall n \implies \exists B_y : |y(n)| \leq B_y, \forall n.$$

No caso LTI, se $|x(n)| \leq B_x, \forall n$ então

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \right| \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)||h(n-m)| \leq B_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(n-m)| \end{aligned}$$

Condição Suficiente: $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| < \infty$

Estabilidade de filtros

T é estável quando, $\forall x$ limitado, $y = T[x]$ também é limitado:

$$\exists B_x > 0 : |x(n)| \leq B_x, \forall n \implies \exists B_y : |y(n)| \leq B_y, \forall n.$$

No caso LTI, se $|x(n)| \leq B_x, \forall n$ então

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \right| \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)||h(n-m)| \leq B_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(n-m)| \end{aligned}$$

Condição Suficiente: $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| < \infty$ (também é necessária)

Causalidade de filtros

Possibilidade de computar y_n sem conhecer o futuro x_{n+1}, x_{n+2}, \dots

Causalidade de filtros

Possibilidade de computar y_n sem conhecer o futuro x_{n+1}, x_{n+2}, \dots
 y_n pode depender de $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$
e também de y_{n-1}, y_{n-2}, \dots

Causalidade de filtros

Possibilidade de computar y_n sem conhecer o futuro x_{n+1}, x_{n+2}, \dots

y_n pode depender de $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$

e também de y_{n-1}, y_{n-2}, \dots

No caso LTI a causalidade é equivalente a

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m)$$

Causalidade de filtros

Possibilidade de computar y_n sem conhecer o futuro x_{n+1}, x_{n+2}, \dots

y_n pode depender de $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$

e também de y_{n-1}, y_{n-2}, \dots

No caso LTI a causalidade é equivalente a

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m)$$

$m \leq n \implies n - m \geq 0$, ou equivalentemente $h(k) = 0$ para $k < 0$.

Filtros FIR e IIR

Filtros FIR (*Finite Impulse Response*) correspondem a uma convolução finita (pode ser implementada diretamente).

Filtros FIR e IIR

Filtros FIR (*Finite Impulse Response*) correspondem a uma convolução finita (pode ser implementada diretamente).
Filtros IIR (*Infinite Impulse Response*) dependem de alguma implementação indireta.

Filtros FIR e IIR

Filtros FIR (*Finite Impulse Response*) correspondem a uma convolução finita (pode ser implementada diretamente).

Filtros IIR (*Infinite Impulse Response*) dependem de alguma implementação indireta.

Por exemplo, um filtro IIR que satisfaz $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} h(n) = 0$ pode ter sua soma truncada (critério de erro residual).

Filtros FIR e IIR

Filtros FIR (*Finite Impulse Response*) correspondem a uma convolução finita (pode ser implementada diretamente).

Filtros IIR (*Infinite Impulse Response*) dependem de alguma implementação indireta.

Por exemplo, um filtro IIR que satisfaz $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} h(n) = 0$ pode ter sua soma truncada (critério de erro residual). Mas $h' = hw$ fará $H' = H * W$ (resultando em *ripples*, ou *efeito de Gibbs*).

Filtros FIR e IIR

Filtros FIR (*Finite Impulse Response*) correspondem a uma convolução finita (pode ser implementada diretamente).

Filtros IIR (*Infinite Impulse Response*) dependem de alguma implementação indireta.

Por exemplo, um filtro IIR que satisfaz $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} h(n) = 0$ pode ter sua soma truncada (critério de erro residual). Mas $h' = hw$ fará $H' = H * W$ (resultando em *ripples*, ou *efeito de Gibbs*).

Filtros IIR podem admitir representações recursivas, e.g.

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m) = x(n) + y(n-1).$$

Operações sobre filtros

Filtros LTI podem ser combinados de diversas maneiras produzindo novos filtros LTI:

Operações sobre filtros

Filtros LTI podem ser combinados de diversas maneiras produzindo novos filtros LTI:

- $T_1 + T_2$ (r.i. $h_1 + h_2$ e r.f. $H_1 + H_2$);

Operações sobre filtros

Filtros LTI podem ser combinados de diversas maneiras produzindo novos filtros LTI:

- $T_1 + T_2$ (r.i. $h_1 + h_2$ e r.f. $H_1 + H_2$);
- αT (r.i. αh e r.f. αH);

Operações sobre filtros

Filtros LTI podem ser combinados de diversas maneiras produzindo novos filtros LTI:

- $T_1 + T_2$ (r.i. $h_1 + h_2$ e r.f. $H_1 + H_2$);
- αT (r.i. αh e r.f. αH);
- $T_2(T_1)$ (r.i. $h_1 * h_2$ e r.f. $H_1 \cdot H_2$).

Filtro inverso

Dado T é possível obter T^{-1} tal que $T^{-1}[T[x]] = x, \forall x$?

Filtro inverso

Dado T é possível obter T^{-1} tal que $T^{-1}[T[x]] = x, \forall x$?

Essa condição é equivalente a

$$(x * h) * g = x * (h * g) = x, \forall x \iff (h * g) = \delta$$

Filtro inverso

Dado T é possível obter T^{-1} tal que $T^{-1}[T[x]] = x, \forall x$?

Essa condição é equivalente a

$$(x * h) * g = x * (h * g) = x, \forall x \iff (h * g) = \delta$$

$$\text{ou } \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)g(n-m) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Filtro inverso

Dado T é possível obter T^{-1} tal que $T^{-1}[T[x]] = x, \forall x$?

Essa condição é equivalente a

$$(x * h) * g = x * (h * g) = x, \forall x \iff (h * g) = \delta$$

$$\text{ou } \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)g(n-m) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Em casos especiais, um filtro inverso pode ser construído por inspeção.

Exemplo: inverso do acumulador

Se T corresponde a $y(n) = \sum_{m \leq n} x(m)$, então

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo: inverso do acumulador

Se T corresponde a $y(n) = \sum_{m \leq n} x(m)$, então

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Queremos g :

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)g(n-m) &= \sum_{m=0}^{\infty} g(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^n g(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo: inverso do acumulador

$$\text{Definindo } g(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ -1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{teremos } \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)g(n-m) = h(n) - h(n-1) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo: inverso do acumulador

$$\text{Definindo } g(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ -1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{teremos } \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)g(n-m) = h(n) - h(n-1) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{De fato, } z(n) = y(n) - y(n-1) = \sum_{m \leq n} x(m) - \sum_{m \leq n-1} x(m) = x(n).$$

Transformada z

Definição: a transformada z do sinal x é

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

Transformada z

Definição: a transformada z do sinal x é

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

Observe que X_k (Fourier) é $X(z)$ com $z = e^{i2\pi k/N}$.

Transformada z

Definição: a transformada z do sinal x é

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

Observe que X_k (Fourier) é $X(z)$ com $z = e^{i2\pi k/N}$.

Um filtro LTI $y = x * h$ pode ser descrito pela *função de transferência* $H(z)$, que satisfaz $Y(z) = H(z)X(z)$.

Exemplo: acumulador generalizado

Considere o filtro $y(n) = x(n) + Ky(n - 1)$, com

$$h(0) = \delta(0) = 1, h(1) = \delta(1) + Kh(0) = 0 + K = K,$$

$$h(2) = \delta(2) + Kh(1) = 0 + KK = K^2 \text{ e em geral } h(n) = K^n.$$

Exemplo: acumulador generalizado

Considere o filtro $y(n) = x(n) + Ky(n - 1)$, com

$$h(0) = \delta(0) = 1, h(1) = \delta(1) + Kh(0) = 0 + K = K,$$

$$h(2) = \delta(2) + Kh(1) = 0 + KK = K^2 \text{ e em geral } h(n) = K^n.$$

A função de transferência deste filtro será

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K^m z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (K/z)^m.$$

Exemplo: acumulador generalizado

Considere o filtro $y(n) = x(n) + Ky(n - 1)$, com

$$h(0) = \delta(0) = 1, h(1) = \delta(1) + Kh(0) = 0 + K = K,$$

$$h(2) = \delta(2) + Kh(1) = 0 + KK = K^2 \text{ e em geral } h(n) = K^n.$$

A função de transferência deste filtro será

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K^m z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (K/z)^m.$$

Esta P.G. converge quando $|K/z| < 1$. Em particular, para $|z| = |e^{i\omega}| = 1$ precisamos de $|K| < 1$. Neste caso, a soma da PG será dada por

$$H(z) = \frac{1}{1 - K/z}.$$

Exemplo: acumulador generalizado

Substituindo $z = e^{i\omega}$,

$$\begin{aligned}H(e^{i\omega}) &= \frac{1}{1 - Ke^{-i\omega}} \\&= \frac{1}{1 - Ke^{-i\omega}} \frac{1 - Ke^{i\omega}}{1 - Ke^{i\omega}} \\&= \frac{1 - Ke^{i\omega}}{1 - Ke^{i\omega} - Ke^{-i\omega} + K^2} \\&= \frac{1 - Ke^{i\omega}}{1 - 2K \cos(\omega) + K^2}\end{aligned}$$

Exemplo: acumulador generalizado

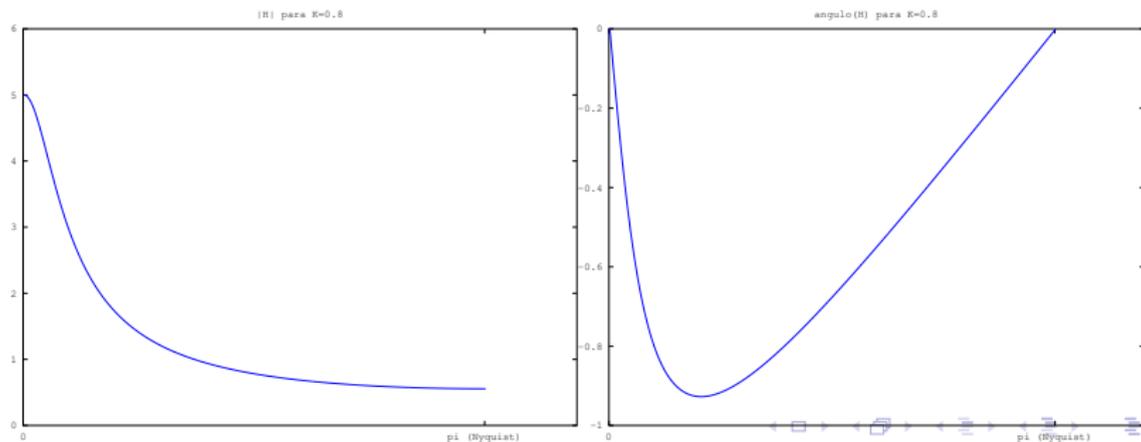
de onde podemos obter

$$\begin{aligned}
 |H(e^{i\omega})| &= \sqrt{H(e^{i\omega})H(e^{i\omega})^*} = \sqrt{\frac{1 - Ke^{i\omega}}{1 - 2K \cos(\omega) + K^2} \frac{1 - Ke^{-i\omega}}{1 - 2K \cos(\omega) + K^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2K \cos(\omega) + K^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \angle H(e^{i\omega}) &= \angle 1 - Ke^{i\omega} = \angle 1 - K \cos(\omega) - iK \sin(\omega) \\
 &= \text{atan2}(-K \sin(\omega), 1 - K \cos(\omega)).
 \end{aligned}$$

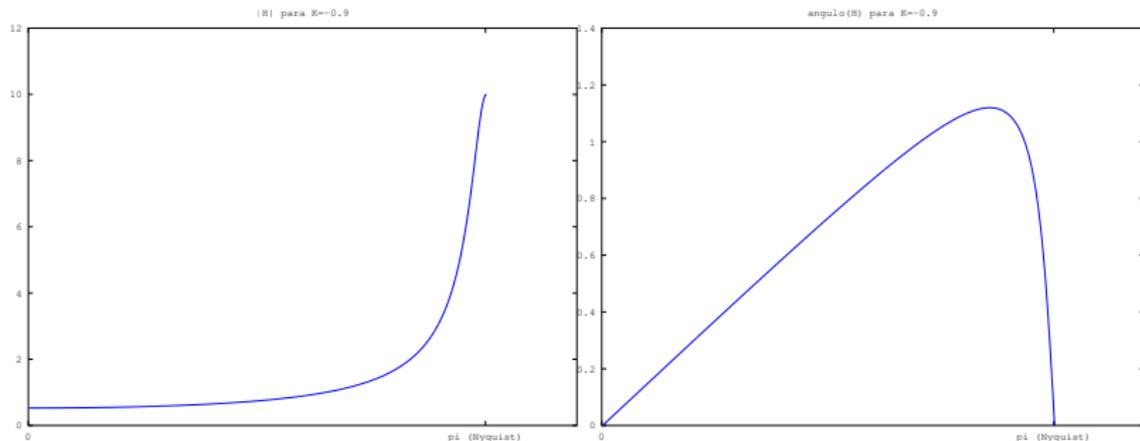
Exemplo: acumulador generalizado

Comportamentos diversos podem ser obtidos para $K \in (-1, +1)$.
Por exemplo, para $K = 0.8$ o comportamento do filtro é de passa-baixas:



Exemplo: acumulador generalizado

...enquanto para $K = -0.9$ o comportamento é de passa-altas:



Equação de filtros LTI recursivos

Podemos construir filtros LTI combinando linearmente várias amostras do sinal da entrada $x(n-j)$, $j = 0, 1, \dots, M$ e várias saídas anteriores do filtro $y(n-l)$, $l = 1, 2, \dots, N$:

$$y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j) + \sum_{l=1}^N b_l y(n-l)$$

onde os coeficientes a_j e b_l permitem configurar/controlar a resposta em frequência do filtro

Equação de filtros LTI recursivos

Podemos construir filtros LTI combinando linearmente várias amostras do sinal da entrada $x(n-j)$, $j = 0, 1, \dots, M$ e várias saídas anteriores do filtro $y(n-l)$, $l = 1, 2, \dots, N$:

$$y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j) + \sum_{l=1}^N b_l y(n-l)$$

onde os coeficientes a_j e b_l permitem configurar/controlar a resposta em frequência do filtro (mas nem todo filtro LTI pode ser expresso assim).

Equação de filtros LTI recursivos

Precisamos definir condições de contorno que tornem a equação acima bem-definida para qualquer x . Quando

$$x(n) = 0, \forall n < 0,$$

então definir

$$y(n) = 0 \text{ para } n < 0$$

é uma maneira fácil de satisfazer a equação do filtro $\forall n < 0$.

Propriedade do deslocamento no tempo

A resposta em frequência associada à equação do filtro pode ser obtida pela seguinte propriedade:

$$\text{se } w(n) = x(n - k) \text{ então } W(z) = z^{-k}X(z).$$

Propriedade do deslocamento no tempo

A resposta em frequência associada à equação do filtro pode ser obtida pela seguinte propriedade:

$$\text{se } w(n) = x(n - k) \text{ então } W(z) = z^{-k}X(z).$$

Prova: por definição

$$W(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m - k)z^{-m}$$

Propriedade do deslocamento no tempo

A resposta em frequência associada à equação do filtro pode ser obtida pela seguinte propriedade:

$$\text{se } w(n) = x(n - k) \text{ então } W(z) = z^{-k} X(z).$$

Prova: por definição

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m - k) z^{-m} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) z^{-(l+k)} = z^{-k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) z^{-l} \end{aligned}$$

Propriedade do deslocamento no tempo

A resposta em frequência associada à equação do filtro pode ser obtida pela seguinte propriedade:

$$\text{se } w(n) = x(n - k) \text{ então } W(z) = z^{-k}X(z).$$

Prova: por definição

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m - k)z^{-m} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)z^{-(l+k)} = z^{-k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)z^{-l} = z^{-k}X(z). \end{aligned}$$

Equação do filtro revisitada

Calculando a transformada z (TZ) da equação do filtro, teremos:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{j=0}^M a_j TZ[x(n-j)] + \sum_{l=1}^N b_l TZ[y(n-l)] \\ &= \sum_{j=0}^M a_j z^{-j} X(z) + \sum_{l=1}^N b_l z^{-l} Y(z) \\ &= X(z) \sum_{j=0}^M a_j z^{-j} + Y(z) \sum_{l=1}^N b_l z^{-l}, \end{aligned}$$

Equação do filtro revisitada

$$Y(z) \left[1 - \sum_{l=1}^N b_l z^{-l} \right] = X(z) \left[\sum_{j=0}^M a_j z^{-j} \right].$$

Equação do filtro revisitada

$$Y(z) \left[1 - \sum_{l=1}^N b_l z^{-l} \right] = X(z) \left[\sum_{j=0}^M a_j z^{-j} \right].$$

Lembrando que $Y(z) = H(z)X(z)$ e portanto $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$, temos

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^M a_j z^{-j}}{1 - \sum_{l=1}^N b_l z^{-l}}.$$

Resposta em frequência

A resposta do filtro na frequência angular ω é $H(e^{i\omega})$:

$$H(e^{i\omega}) = \frac{\sum_{j=0}^M a_j e^{-ij\omega}}{1 - \sum_{l=1}^N b_l e^{-il\omega}}.$$

Resposta em frequência

A resposta do filtro na frequência angular ω é $H(e^{i\omega})$:

$$H(e^{i\omega}) = \frac{\sum_{j=0}^M a_j e^{-ij\omega}}{1 - \sum_{l=1}^N b_l e^{-il\omega}}$$

A variedade dessa classe de filtros corresponde a quaisquer respostas na forma de quocientes de polinômios. Ainda assim, haverá funções (e filtros LTI) que não pertencem a esta categoria.

Exemplo: filtro passa-baixas ideal

Considere $\hat{\omega} \in [-\pi, +\pi]$ (medida em radianos por amostra), e o filtro

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [-\hat{\omega}, +\hat{\omega}] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo: filtro passa-baixas ideal

Considere $\hat{\omega} \in [-\pi, +\pi]$ (medida em radianos por amostra), e o filtro

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [-\hat{\omega}, +\hat{\omega}] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

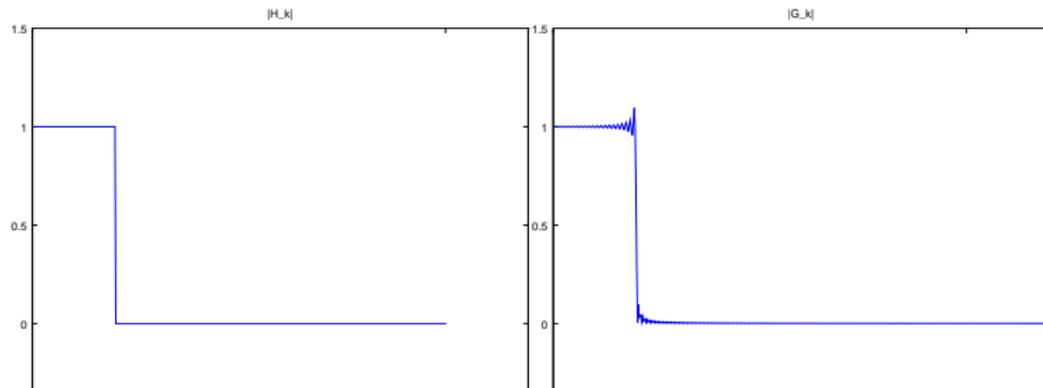
cuja resposta ao impulso $h(n) = \frac{\text{sen}(n\hat{\omega})}{n\hat{\omega}}$ é uma função sinc no domínio do tempo.

Exemplo: filtro passa-baixas ideal

Pela descontinuidade, esta função não é um quociente de polinômios, e portanto este filtro não admite uma equação finita.

Exemplo: filtro passa-baixas ideal

Pela descontinuidade, esta função não é um quociente de polinômios, e portanto este filtro não admite uma equação finita. Este filtro só pode ser computado de forma aproximada, com mudanças previsíveis na resposta em frequência.



Polos e Zeros

Zeros do filtro são valores $z \in \mathbb{C}$ tais que $P(z) = \sum_{j=0}^M a_j z^{-j} = 0$.

Em particular, se $z = e^{i\omega}$ a frequência ω será anulada na resposta em frequência do filtro.

Polos e Zeros

Zeros do filtro são valores $z \in \mathbb{C}$ tais que $P(z) = \sum_{j=0}^M a_j z^{-j} = 0$.

Em particular, se $z = e^{i\omega}$ a frequência ω será anulada na resposta em frequência do filtro.

Polos do filtro são valores $z \in \mathbb{C}$ tais que $Q(z) = 1 - \sum_{l=1}^N b_l z^{-l} = 0$.

Se um polo ocorre em $z = e^{i\omega}$ o filtro será instável.

Forma fatorada da função de transferência

Pelo teorema fundamental da Álgebra, $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios em z^{-1} que possuem M e N raízes:

$$H(z) = a_0 \frac{\prod_{j=1}^M (1 - \zeta_j z^{-1})}{\prod_{l=1}^N (1 - \pi_l z^{-1})}.$$

Forma fatorada da função de transferência

Pelo teorema fundamental da Álgebra, $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios em z^{-1} que possuem M e N raízes:

$$H(z) = a_0 \frac{\prod_{j=1}^M (1 - \zeta_j z^{-1})}{\prod_{l=1}^N (1 - \pi_l z^{-1})}.$$

Observe que $(1 - rz^{-1})$ se anula quando $z = r$, e que o numerador precisa de um ajuste de escala (a_0 , responsável pelo ganho geral do filtro), mas o denominador não ($b_0 = 1$).

Magnitude da Resposta em Frequência

Note que

$$|H(z)| = |a_0| \frac{\prod_{j=1}^M |1 - \zeta_j z^{-1}|}{\prod_{l=1}^N |1 - \pi_l z^{-1}|}.$$

Magnitude da Resposta em Frequência

Quando $z = e^{i\omega}$ então $|z| = 1$ e

$$|1 - rz^{-1}| = |(1 - rz^{-1})\frac{z}{z}| = \frac{|z-r|}{|z|} = |z - r|.$$

Magnitude da Resposta em Frequência

Quando $z = e^{i\omega}$ então $|z| = 1$ e

$$|1 - rz^{-1}| = |(1 - rz^{-1})\frac{z}{z}| = \frac{|z-r|}{|z|} = |z - r|. \text{ Portanto}$$

$$|H(e^{i\omega})| = |a_0| \frac{\prod_{j=1}^M |e^{i\omega} - \zeta_j|}{\prod_{l=1}^M |e^{i\omega} - \pi_l|} = |a_0| \frac{\prod_{j=1}^M \text{dist}(e^{i\omega}, \zeta_j)}{\prod_{l=1}^M \text{dist}(e^{i\omega}, \pi_l)},$$

Exemplo: filtro passa-baixas de um polo

Considere $y(n] = x(n] + 0.8y(n - 1]$, cuja função de transferência é

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}.$$

Exemplo: filtro passa-baixas de um polo

Considere $y(n) = x(n) + 0.8y(n-1)$, cuja função de transferência é

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}.$$

Temos

$$|H(1)| = \frac{1}{|1 - 0.8|} = 5.$$

Para normalizar este filtro, basta ajustar $a_0 = \frac{1}{|H(1)|} = 0.2$, obtendo

$$y(n) = 0.2x(n) + 0.8y(n-1).$$

Resposta em fase

Seja $K = \max\{M, N\}$; temos

$$\begin{aligned}
 H(z) &= a_0 \frac{z^K \prod_{j=1}^M (1 - \zeta_j z^{-1})}{z^K \prod_{l=1}^N (1 - \pi_l z^{-1})} = a_0 \frac{z^{K-M} \prod_{j=1}^M z(1 - \zeta_j z^{-1})}{z^{K-N} \prod_{l=1}^N z(1 - \pi_l z^{-1})} \\
 &= a_0 z^{N-M} \frac{\prod_{j=1}^M (z - \zeta_j)}{z^{K-N} \prod_{l=1}^N (z - \pi_l)}.
 \end{aligned}$$

Resposta em fase

Substituindo $z = e^{i\omega}$ nesta equação, e tomando a fase, temos:

$$\begin{aligned}
 \angle H(e^{i\omega}) &= \angle \left(a_0 e^{i(N-M)\omega} \frac{\prod_{j=1}^M (e^{i\omega} - \zeta_j)}{\prod_{l=1}^N (e^{i\omega} - \pi_l)} \right) \\
 &= \angle(e^{i(N-M)\omega}) + \angle \left(\prod_{j=1}^M (e^{i\omega} - \zeta_j) \right) - \angle \left(\prod_{l=1}^N (e^{i\omega} - \pi_l) \right) \\
 &= (N - M)\omega + \sum_{j=1}^M \angle(e^{i\omega} - \zeta_j) - \sum_{l=1}^N \angle(e^{i\omega} - \pi_l)
 \end{aligned}$$

Pares polos/zeros complexo-conjugados

Raízes de polinômios com coeficientes reais são sempre ou reais ou em pares de raízes complexo-conjugadas.

Pares polos/zeros complexo-conjugados

Raízes de polinômios com coeficientes reais são sempre ou reais ou em pares de raízes complexo-conjugadas. Esta é uma característica que terá que ser ativamente controlada na criação de novos filtros a partir de um posicionamento arbitrário de polos e zeros.

Pares polos/zeros complexo-conjugados

Raízes de polinômios com coeficientes reais são sempre ou reais ou em pares de raízes complexo-conjugadas. Esta é uma característica que terá que ser ativamente controlada na criação de novos filtros a partir de um posicionamento arbitrário de polos e zeros.

Criar filtros com polos e zeros não pareados através de conjugação produzirá equações de filtros com coeficientes complexos, o que não será muito útil no processamento de sinais de áudio.

Exemplo: filtro de dois polos

Considere a equação $y(n] = x(n] + b_1y(n - 1] + b_2y(n - 2]$. Temos

$$H(z) = \frac{1}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2}}.$$

Exemplo: filtro de dois polos

Considere a equação $y(n) = x(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2)$. Temos

$$H(z) = \frac{1}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2}}.$$

Fatorando o denominador teremos

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \pi_1z^{-1})(1 - \pi_2z^{-1})}.$$

Exemplo: filtro de dois polos

Considere a equação $y(n) = x(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2)$. Temos

$$H(z) = \frac{1}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2}}.$$

Fatorando o denominador teremos

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \pi_1z^{-1})(1 - \pi_2z^{-1})}.$$

Temos dois casos de interesse: ou os dois polos são reais, ou formam um par complexo-conjugado.

caso 1: dois polos reais

Neste caso temos

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \pi_1 z^{-1})(1 - \pi_2 z^{-1})} = \frac{1}{1 - (\pi_1 + \pi_2)z^{-1} + \pi_1 \pi_2 z^{-2}},$$

de onde $b_1 = \pi_1 + \pi_2$ e $b_2 = -\pi_1 \pi_2$.

caso 1: dois polos reais

Neste caso temos

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \pi_1 z^{-1})(1 - \pi_2 z^{-1})} = \frac{1}{1 - (\pi_1 + \pi_2)z^{-1} + \pi_1 \pi_2 z^{-2}},$$

de onde $b_1 = \pi_1 + \pi_2$ e $b_2 = -\pi_1 \pi_2$.

Lembrando que

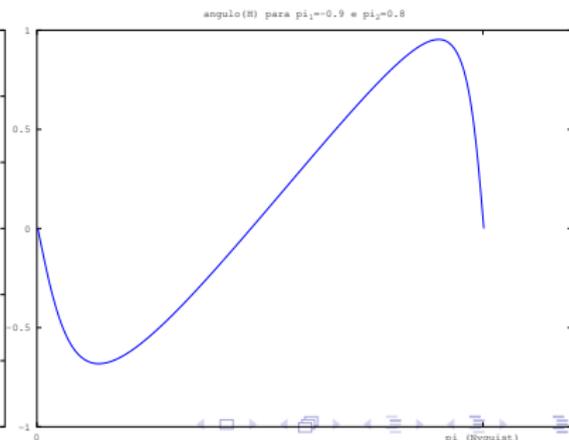
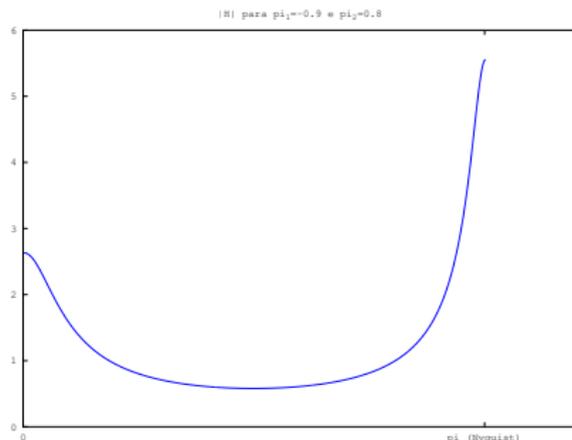
$$|H(e^{i\omega})| = \frac{1}{|e^{i\omega} - \pi_1| |e^{i\omega} - \pi_2|},$$

esse caso pode ser usado para definir um filtro do tipo *rejeita-faixa*.

caso 1: dois polos reais

Gráficos de $|H_k|$ e $\angle H_k$ para o filtro rejeita-faixa

$y(n) = x(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2)$ com $\pi_1 = -0.9$ e $\pi_2 = 0.8$
 ($b_1 = -0.1$ e $b_2 = 0.72$).



caso 1: dois polos reais

A resposta em fase também tem uma expressão simples, já que

$$\angle(e^{i\omega} - K) = \text{atan2}(\text{sen}(\omega), \text{cos}(\omega) - K),$$

e portanto

$$\begin{aligned} \angle H(e^{i\omega}) &= 2\omega - \angle(e^{i\omega} + 0.9) - \angle(e^{i\omega} - 0.8) \\ &= 2\omega - \text{atan2}(\text{sen}(\omega), \text{cos}(\omega) + 0.9) \\ &\quad - \text{atan2}(\text{sen}(\omega), \text{cos}(\omega) - 0.8). \end{aligned}$$

caso 2: dois polos complexo-conjugados

Aqui teremos $\pi_1 = Ae^{i\hat{\omega}}$ e $\pi_2 = Ae^{-i\hat{\omega}}$:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1}{(1-Ae^{i\hat{\omega}}z^{-1})(1-Ae^{-i\hat{\omega}}z^{-1})} \\
 &= \frac{1}{1-A(e^{i\hat{\omega}}+e^{-i\hat{\omega}})z^{-1}+A^2z^{-2}} \\
 &= \frac{1}{1-2A\cos(\hat{\omega})z^{-1}+A^2z^{-2}},
 \end{aligned}$$

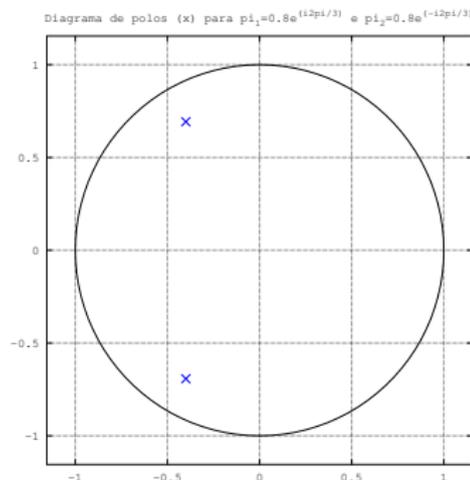
de onde $b_1 = 2A\cos(\hat{\omega})$ e $b_2 = -A^2$.

caso 2: dois polos complexo-conjugados

Note que o máximo será atingido próximo a $z = e^{i\hat{\omega}}$, onde

$$|H(z)| = \frac{1}{(1 - A)\sqrt{1 - 2A \cos(2\hat{\omega}) + A^2}},$$

o que revela a característica *passa-faixa* desse filtro.



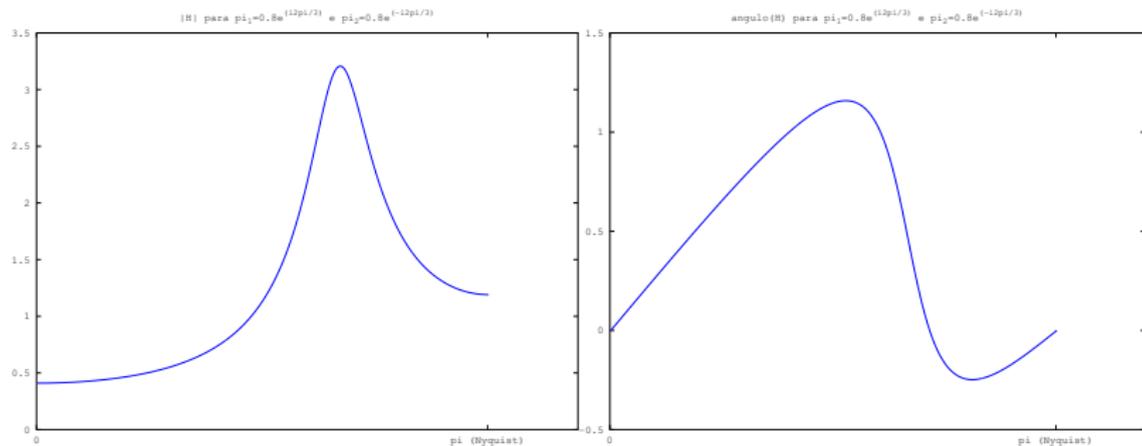
caso 2: dois polos complexo-conjugados

A resposta em fase deste filtro é

$$\begin{aligned}\angle H(e^{i\omega}) &= 2\omega - \angle(e^{i\omega} - 0.8e^{i\frac{2\pi}{3}}) - \angle(e^{i\omega} - 0.8e^{-i\frac{2\pi}{3}}) \\ &= 2\omega - \operatorname{atan2} \left[\sin(\omega) - 0.8\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \cos(\omega) - 0.8\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &\quad - \operatorname{atan2} \left[\sin(\omega) + 0.8\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \cos(\omega) - 0.8\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right].\end{aligned}$$

caso 2: dois polos complexo-conjugados

Gráficos de $|H_k|$ e $\angle H_k$ para o filtro passa-faixa de dois polos com $\pi_1 = 0.8e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $\pi_2 = 0.8e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.



caso 2: dois polos complexo-conjugados

Se quiséssemos normalizar este filtro a partir da estimativa

$$|H_{\text{pico}}| \approx |H(e^{i\hat{\omega}})|,$$

bastaria reformular a equação usando

$$a_0 = (1 - A)\sqrt{1 - 2A \cos(2\hat{\omega}) + A^2},$$

ou seja, fazendo

$$y(n) = \left[(1-A)\sqrt{1-2A\cos(2\hat{\omega})+A^2} \right] \cdot x(n) + [2A\cos(\hat{\omega})] \cdot y(n-1) - [A^2] \cdot y(n-2)$$

Composição de filtros

É possível formar filtros bastante gerais a partir da composição de filtros bastante simples. Em particular, o filtro

$$H(z) = a_0 \frac{\prod_{j=1}^M (1 - \zeta_j z^{-1})}{\prod_{l=1}^N (1 - \pi_l z^{-1})},$$

Composição de filtros

pode ser decomposto em

$$H(z) = a_0 \frac{\overbrace{\prod_j (1 - \zeta_j z^{-1})}^{\text{zeros reais}} \overbrace{\prod_j (1 - \zeta_j z^{-1})(1 - \zeta_j^* z^{-1})}^{\text{zeros complexos}}}{\underbrace{\prod_l (1 - \pi_l z^{-1})}_{\text{polos reais}} \underbrace{\prod_l (1 - \pi_l z^{-1})(1 - \pi_l^* z^{-1})}_{\text{polos complexos}}}$$

Exemplo: filtro com 2 polos complexos

Considere o filtro com 2 polos complexos em $Ae^{\pm i\hat{\omega}}$
com equação $y(n) = a_0x(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2)$
onde $b_1 = 2A \cos(\hat{\omega})$ e $b_2 = -A^2$.

Exemplo: filtro com 2 polos complexos

Considere o filtro com 2 polos complexos em $Ae^{\pm i\hat{\omega}}$ com equação $y(n) = a_0x(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2)$ onde $b_1 = 2A \cos(\hat{\omega})$ e $b_2 = -A^2$.

Podemos compor este filtro com o filtro com dois zeros reais nas frequências d.c. ($\zeta_1 = 1$) e Nyquist ($\zeta_2 = -1$).

Exemplo: filtro com 2 polos complexos

Considere o filtro com 2 polos complexos em $Ae^{\pm i\hat{\omega}}$
com equação $y(n) = a_0x(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2)$
onde $b_1 = 2A \cos(\hat{\omega})$ e $b_2 = -A^2$.

Podemos compor este filtro com o filtro com dois zeros reais
nas frequências d.c. ($\zeta_1 = 1$) e Nyquist ($\zeta_2 = -1$).

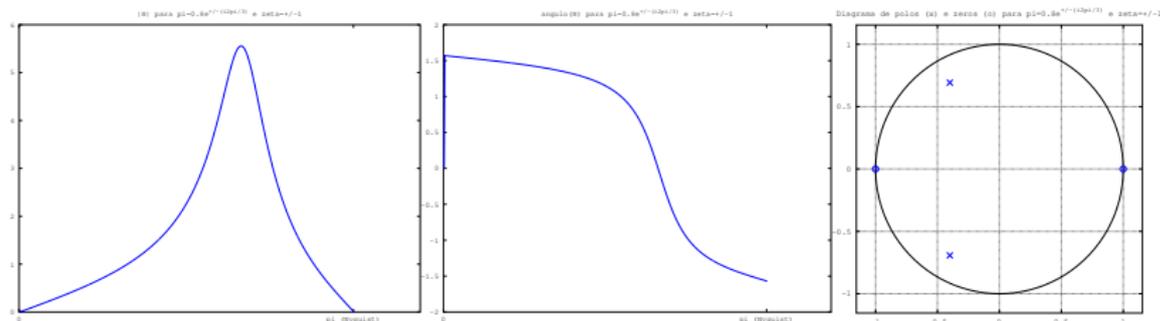
Isso vai multiplicar $H(z)$ por

$$(1 - \zeta_1 z^{-1})(1 - \zeta_2 z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) = 1 - z^{-2},$$

ou seja, acrescentar um termo $x(n-2)$ na equação do filtro
com o mesmo peso do termo $x(n)$ (pois $a_0(1 - z^{-2}) = a_0 - a_0 z^{-2}$).

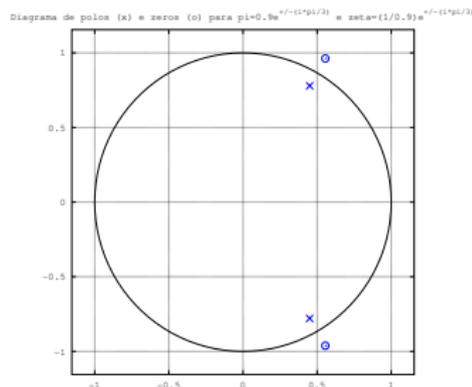
Exemplo: filtro com 2 polos complexos

Gráficos de $|H_k|$ e $\angle H_k$ e diagrama de polos (\times) e zeros (\circ) para o filtro passa-faixa com dois polos em $\pi = 0.8e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$ e dois zeros em $\zeta = \pm 1$.



Exemplo: filtro passa-tudo

É possível balancear um par de polos complexo-conjugados em $\pi_1 = Ae^{i\hat{\omega}}$ e $\pi_2 = Ae^{-i\hat{\omega}}$ com um par de zeros em $\zeta_1 = \frac{1}{A}e^{i\hat{\omega}}$ e $\zeta_2 = \frac{1}{A}e^{-i\hat{\omega}}$. Isto pode ser desejável na implementação de difusores acústicos e reverberadores artificiais.



Exemplo: filtro passa-tudo

Este filtro possui a função de transferência

$$\begin{aligned} H(z) &= a_0 \frac{(1-\zeta_1 z^{-1})(1-\zeta_2 z^{-1})}{(1-\pi_1 z^{-1})(1-\pi_2 z^{-1})} \\ &= a_0 \frac{(1-\frac{1}{A} e^{j\hat{\omega}} z^{-1})(1-\frac{1}{A} e^{-j\hat{\omega}} z^{-1})}{(1-A e^{j\hat{\omega}} z^{-1})(1-A e^{-j\hat{\omega}} z^{-1})} \end{aligned}$$

Exemplo: filtro passa-tudo

Substituindo $z = e^{i\omega}$, teremos

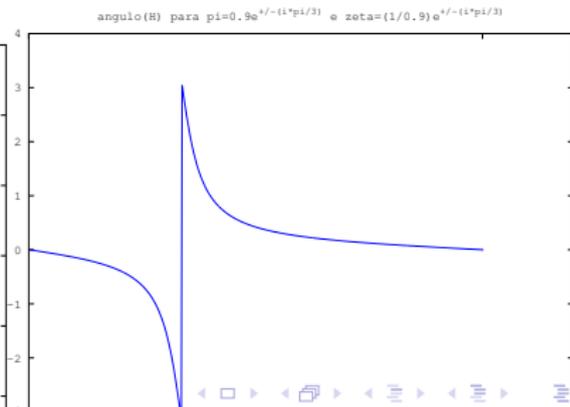
$$\begin{aligned}
 |H(e^{i\omega})| &= |a_0| \left| \frac{(1 - \frac{1}{A} e^{i\hat{\omega}} e^{-i\omega}) \cdot (1 - \frac{1}{A} e^{-i\hat{\omega}} e^{-i\omega})}{(1 - A e^{i\hat{\omega}} e^{-i\omega}) \cdot (1 - A e^{-i\hat{\omega}} e^{-i\omega})} \right| \\
 &= |a_0| \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{A} \cos(\hat{\omega} - \omega) + \frac{1}{A^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{A} \cos(\hat{\omega} + \omega) + \frac{1}{A^2}}}{\sqrt{1 - 2A \cos(\hat{\omega} - \omega) + A^2} \cdot \sqrt{1 - 2A \cos(\hat{\omega} + \omega) + A^2}} \\
 &= |a_0| \frac{1}{A^2} \frac{\sqrt{A^2 - 2A \cos(\hat{\omega} - \omega) + 1} \cdot \sqrt{A^2 - 2A \cos(\hat{\omega} + \omega) + 1}}{\sqrt{1 - 2A \cos(\hat{\omega} - \omega) + A^2} \cdot \sqrt{1 - 2A \cos(\hat{\omega} + \omega) + A^2}} \\
 &= \frac{|a_0|}{A^2},
 \end{aligned}$$

o que mostra a propriedade *passa-tudo* deste filtro.

Exemplo: filtro passa-tudo

Sua resposta em fase pode ser computada pela expressão

$$\angle H(e^{i\omega}) = \angle\left(e^{i\omega} - \frac{1}{A}e^{i\hat{\omega}}\right) + \angle\left(e^{i\omega} - \frac{1}{A}e^{-i\hat{\omega}}\right) - \angle\left(e^{i\omega} - Ae^{i\hat{\omega}}\right) - \angle\left(e^{i\omega} - Ae^{-i\hat{\omega}}\right).$$



Largura de Faixa

Por convenção, a largura de um pico de ressonância corresponde aos valores de frequência onde o ganho é de -3 dB em relação à amplitude do pico, ou seja, à faixa de frequências ω onde

$$20 \log_{10} \frac{|H(e^{i\omega})|}{|H_{\text{pico}}|} \geq -3,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{|H(e^{i\omega})|}{|H_{\text{pico}}|} \geq 10^{-3/20} = (10^{-3})^{1/20} \approx (2^{-10})^{1/20} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo: largura de faixa

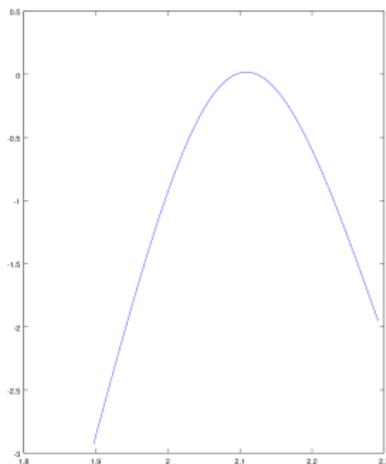
No caso do filtro com dois polos em

$$\pi_1 = 0.8e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}, \text{ temos}$$

$$L = 2\text{atan}(1 - A) = 2\text{atan}(0.2) \approx 0.395;$$

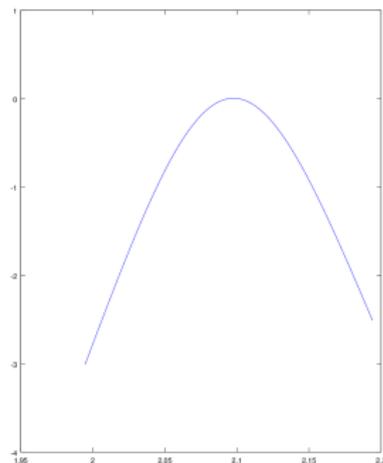
$$\text{na frequência } \omega = \frac{2\pi}{3} - L/2 \approx 1.897$$

temos que o ganho em decibéis relativo ao pico é de -2.930 dB; porém na frequência $\omega = \frac{2\pi}{3} + L/2 \approx 2.292$ este ganho é de -1.952 dB, bem superior ao esperado.



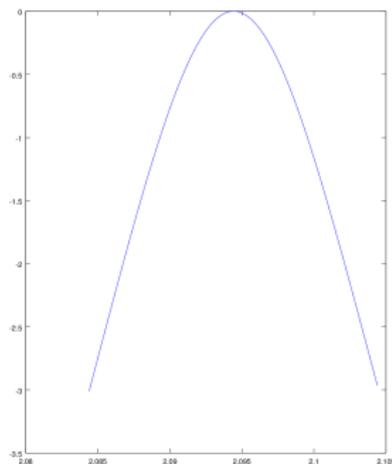
Exemplo: largura de faixa

Para o filtro com dois polos em $\pi = 0.9e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$, temos $L = 2\text{atan}(1 - A) = 2\text{atan}(0.1) \approx 0.199$; na frequência $\omega = \frac{2\pi}{3} - L/2 \approx 1.995$ temos que o ganho em decibéis relativo ao pico é de -3.007 dB; em $\omega = \frac{2\pi}{3} + L/2 \approx 2.194$ o ganho é de -2.509 dB.



Exemplo: largura de faixa

Para o filtro com dois polos em $\pi = 0.99e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$, temos $L = 2\text{atan}(1 - A) = 2\text{atan}(0.01) \approx 0.0199$; na frequência $\omega = \frac{2\pi}{3} - L/2 \approx 2.0844$ temos que o ganho em decibéis relativo ao pico é de -3.0133 dB; em $\omega = \frac{2\pi}{3} + L/2 \approx 2.1044$ o ganho é de -2.9632 dB.



Observações sobre polos e largura de faixa

Quanto mais próximo o polo do círculo unitário (e portanto menor o valor de A), mais estreita é a largura da faixa de frequências em torno do pico de ressonância.

Observações sobre polos e largura de faixa

Quanto mais próximo o polo do círculo unitário (e portanto menor o valor de A), mais estreita é a largura da faixa de frequências em torno do pico de ressonância.

Como a distância $1 - A$ do polo $\pi_I = Ae^{i\hat{\omega}}$ ao círculo controla simultaneamente a largura de banda e o fator de ganho, para se obter um controle mais fino do fator de ganho pode-se usar um zero $\zeta_I = Be^{i\hat{\omega}}$ alinhado ao polo π_I .

Decaimento em frequência

No caso de filtros passa-altas e passa-baixas também é costumeiro caracterizar através de dois valores a transição entre a parte do espectro que “passa” e a que fica retida:

Decaimento em frequência

No caso de filtros passa-altas e passa-baixas também é costumeiro caracterizar através de dois valores a transição entre a parte do espectro que “passa” e a que fica retida:

- a *frequência de corte* é o ponto da resposta em frequência com -3 dB abaixo do pico;

Decaimento em frequência

No caso de filtros passa-altas e passa-baixas também é costumeiro caracterizar através de dois valores a transição entre a parte do espectro que “passa” e a que fica retida:

- a *frequência de corte* é o ponto da resposta em frequência com -3 dB abaixo do pico;
- o *decaimento em frequência (roll-off)* é a atenuação adicional além da frequência de corte (em decibéis por oitava).

Decaimento em frequência

No caso de filtros passa-altas e passa-baixas também é costumeiro caracterizar através de dois valores a transição entre a parte do espectro que “passa” e a que fica retida:

- a *frequência de corte* é o ponto da resposta em frequência com -3 dB abaixo do pico;
- o *decaimento em frequência (roll-off)* é a atenuação adicional além da frequência de corte (em decibéis por oitava).

Filtros passa-baixas e passa-altas de 1 polo real (ou 1 zero real) possuem taxa de decaimento de aproximadamente 6 dB por oitava. Filtros de segunda ordem (2 polos ou 2 zeros) possuem decaimento mais acentuado, da ordem de 12 dB por oitava.

Resposta ao impulso de um filtro FIR

Podemos estudar e caracterizar filtros através de sua resposta ao impulso. Iremos considerar aqui alguns casos especiais.

Resposta ao impulso de um filtro FIR

Podemos estudar e caracterizar filtros através de sua resposta ao impulso. Iremos considerar aqui alguns casos especiais.

Filtros FIR: Se um filtro é definido por

$$y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j).$$

Resposta ao impulso de um filtro FIR

Podemos estudar e caracterizar filtros através de sua resposta ao impulso. Iremos considerar aqui alguns casos especiais.

Filtros FIR: Se um filtro é definido por

$$y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j).$$

Para $x(n) = \delta(n)$ temos

$$h(n) = y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j) = \sum_{j=0}^M a_j \delta(n-j) = a_n, \quad \forall n = 0, \dots, M$$

Resposta ao impulso de um filtro FIR

Podemos estudar e caracterizar filtros através de sua resposta ao impulso. Iremos considerar aqui alguns casos especiais.

Filtros FIR: Se um filtro é definido por

$$y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j).$$

Para $x(n) = \delta(n)$ temos

$$h(n) = y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j) = \sum_{j=0}^M a_j \delta(n-j) = a_n, \quad \forall n = 0, \dots, M$$

Logo $y = h * x$ onde $h = (a_0, a_1, \dots, a_M, 0, 0, \dots)$.

Resposta ao impulso de um filtro FIR

Note que este filtro possui função de transferência

$$H(z) = \sum_{j=0}^M a_j z^{-j},$$

ou seja, o filtro só possui zeros.

Resposta ao impulso de um filtro FIR

Note que este filtro possui função de transferência

$$H(z) = \sum_{j=0}^M a_j z^{-j},$$

ou seja, o filtro só possui zeros.

Em particular, filtros com 1 e 2 zeros correspondem a respostas ao impulso de comprimento 2 e 3 (cópias sobrepostas do sinal de entrada com atrasos de 1 e 2 amostras e ganhos a_0 , a_1 e a_2).

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Filtro IIR com 1 polo: Um filtro definido pela equação

$$y(n) = a_0x(n) + b_1y(n - 1)$$

possui como resposta ao impulso

$$h(n) = a_0\delta(n) + b_1h(n - 1);$$

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Filtro IIR com 1 polo: Um filtro definido pela equação

$$y(n) = a_0x(n) + b_1y(n - 1)$$

possui como resposta ao impulso

$$h(n) = a_0\delta(n) + b_1h(n - 1);$$

com as condições iniciais $h(n) = 0, \forall n < 0$ temos

$$h(n) = a_0b_1^n, \forall n \geq 0.$$

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Através da equação

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} a_0 b_1^m x(n - m)$$

podemos observar que a saída é uma coleção de infinitas cópias da entrada, progressivamente defasadas e atenuadas (supondo $|b_1| < 1$), correspondendo a um processo de memória infinita com taxa de esquecimento exponencial.

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Através da equação

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} a_0 b_1^m x(n - m)$$

podemos observar que a saída é uma coleção de infinitas cópias da entrada, progressivamente defasadas e atenuadas (supondo $|b_1| < 1$), correspondendo a um processo de memória infinita com taxa de esquecimento exponencial. Se $|b_1| \geq 0$ o filtro será instável; mesmo com $b_1 = 1$ o filtro é instável, pois se torna um acumulador. A estabilidade é verificada se, e somente se, $|b_1| < 1$.

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Filtro IIR com 2 polos: Um filtro definido pela equação

$$y(n) = a_0x(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2)$$

com dois polos complexos $\pi = Ae^{\pm i\hat{\omega}}$ possui uma resposta ao impulso infinita:

n	$h(n)$
0	a_0
1	a_0b_1
2	$a_0b_1^2 + a_0b_2$
3	$b_1(b_1^2a_0 + b_2a_0) + b_2(b_1a_0) = a_0b_1^3 + 2a_0b_1b_2$
4	$b_1(a_0b_1^3 + 2a_0b_1b_2) + b_2(a_0b_1^2 + a_0b_2) = a_0b_1^4 + 3a_0b_1^2b_2 + a_0b_2^2$
...	...

Resposta ao impulso de um filtro IIR

A partir desta expansão não é fácil chegar a uma solução analítica!

Resposta ao impulso de um filtro IIR

A partir desta expansão não é fácil chegar a uma solução analítica!
Lembrando que

$$b_1 = A(e^{i\hat{\omega}} + e^{-i\hat{\omega}}) = 2A \cos(\hat{\omega})$$

e

$$b_2 = -A^2,$$

e lembrando da relação entre as exponenciais e senos e cossenos, é possível provar que

$$h(n) = \frac{a_0 A^n}{\sin(\hat{\omega})} \sin((n+1)\hat{\omega}), \quad \forall n \geq 0.$$

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Portanto que um par de polos produz uma resposta ao impulso na forma de uma oscilação senoidal com amplitude variando exponencialmente.

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Portanto que um par de polos produz uma resposta ao impulso na forma de uma oscilação senoidal com amplitude variando exponencialmente.

Para $|A| < 1$ esta componente exponencial terá um efeito de amortecimento na oscilação, com $|A| = 1$ a oscilação senoidal segue inalterada por tempo infinito, e para $|A| > 1$ ela terá uma amplificação exponencial.

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Portanto que um par de polos produz uma resposta ao impulso na forma de uma oscilação senoidal com amplitude variando exponencialmente.

Para $|A| < 1$ esta componente exponencial terá um efeito de amortecimento na oscilação, com $|A| = 1$ a oscilação senoidal segue inalterada por tempo infinito, e para $|A| > 1$ ela terá uma amplificação exponencial.

Isso justifica a condição de estabilidade associada a filtros recursivos, que corresponde a exigir que todos os polos estejam no interior estrito do círculo unitário.

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Observe que para $A = 1$ o filtro também não será estável, apesar da resposta ao impulso ser de fato limitada.

Resposta ao impulso de um filtro IIR

Observe que para $A = 1$ o filtro também não será estável, apesar da resposta ao impulso ser de fato limitada. Basta alimentar o sistema com uma entrada da forma $x(n) = h(-n)$ para notar que a saída não é limitada:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)|^2 \\
 &= \frac{a_0}{\text{sen} \hat{\omega}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A^{2m} \text{sen}((m+1)\hat{\omega})^2 \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

Projeto de filtros

Veremos duas técnicas simples para projetar filtros LTI através da especificação de $K + 1$ pontos de controle

$$H_0, H_1, \dots, H_K \in \mathbb{C}$$

da resposta em frequência, correspondendo às frequências

$$\omega_0 = 0, \omega_1 = \frac{\pi}{K}, \dots, \omega_k = k \frac{\pi}{K}, \dots, \omega_K = \pi,$$

linearmente espaçadas entre a frequência d.c. e a frequência de Nyquist.

Desenho de filtro FIR (só-zeros)

Nesta abordagem, consideramos a equação de convolução $y = x * h$ onde $a_0 = h(0)$, $a_1 = h(1)$, ... são os coeficientes do filtro na equação

$$y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j),$$

Desenho de filtro FIR (só-zeros)

Nesta abordagem, consideramos a equação de convolução $y = x * h$ onde $a_0 = h(0)$, $a_1 = h(1)$, ... são os coeficientes do filtro na equação

$$y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j),$$

com $Y(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})X(e^{i\omega})$, onde $H(z) = \sum_{j=0}^M a_j z^{-j}$ e assim

$$H(e^{i\omega_k}) = \sum_{j=0}^M a_j e^{-ik\omega_k} = \sum_{j=0}^M a_j e^{-ikj\pi/K} = H_k, \quad k = 0, \dots, K.$$

Desenho de filtro FIR (só-zeros)

Definindo

$$\hat{H} = (H_0, H_1, \dots, H_K, H_{K-1}^*, H_{K-2}^*, \dots, H_1^*),$$

preservamos a estrutura de simetria conjugada da DFT com $M = 2K - 1$, de tal forma que

$$\sum_{j=0}^{2K-1} a_j e^{-i2\pi k \frac{j}{2K}} = \hat{H}_k, \quad k = 0, \dots, K.$$

Desenho de filtro FIR (só-zeros)

Temos assim a estratégia de definir o vetor $a \in \mathbb{R}^{2K}$ através da expressão

$$a_j = iDFT(\hat{H})_j = \sum_{k=0}^{2K-1} \hat{H}_k e^{i2\pi j \frac{k}{2K}}.$$

Isto produzirá um filtro FIR com $M = 2K - 1$ zeros, cuja resposta em frequência contínua $H(e^{i\omega})$ passará exatamente pelos pontos H_0, H_1, \dots, H_K nas frequências $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_K$.

Desenho de filtro FIR (só-zeros)

A resposta em frequência está definida para *qualquer* frequência $\omega \in [-\pi, \pi]$, e não apenas para aquelas usadas nos pontos de controle.

Isso pode ocasionar efeitos indesejados na resposta do filtro, como picos posicionados em frequências intermediárias ou flutuações imprevistas na definição dos pontos de controle.

Desenho de filtro FIR (só-zeros)

Duas soluções são possíveis nesse caso:

- aumentar o número de pontos de controle, e consequentemente o tamanho do filtro e o custo computacional associado;
- ajustar as posições dos zeros do filtro obtido, a fim de posicionar melhor as regiões de ressonância (amplificação) e anti-ressonância (atenuação) da resposta em frequência.

Desenho de filtro FIR (só-zeros)

Porém:

- As posições exatas dos picos e vales da resposta em frequência são resultado da ação *conjunta* de todos os zeros do filtro, e portanto este reposicionamento dos zeros terá um efeito *indireto* sobre a forma dos picos e vales.
- Os zeros tem um efeito de *atenuação* sobre as frequências próximas, estando o seu efeito mais diretamente relacionados aos vales (*notches*) da resposta em frequência, sendo os picos o resultado indireto da ausência de atenuadores naquelas regiões.

Desenho de filtro IIR só-polos

Nesta segunda abordagem, consideraremos a equação recursiva modificada

$$b_0 y(n) = x(n) - \sum_{l=1}^N b_l y(n-l),$$

cuja função de transferência é

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{l=0}^N b_l z^{-l}},$$

Desenho de filtro IIR só-polos

Consideraremos a correspondência

$$H(e^{i\omega_k}) = \frac{1}{\sum_{l=0}^N b_l e^{-il\omega_k}} = \frac{1}{\sum_{l=0}^N b_l e^{-ilk\pi/K}} = H_k, \quad k = 0, \dots, K,$$

de onde obtemos

$$\sum_{l=0}^N b_l e^{-ilk\pi/K} = \frac{1}{H_k}, \quad k = 0, \dots, K.$$

Desenho de filtro IIR só-polos

Considere o vetor

$$\hat{H} = \left(\frac{1}{H_0}, \frac{1}{H_1}, \dots, \frac{1}{H_K}, \frac{1}{H_{K-1}^*}, \frac{1}{H_{K-2}^*}, \dots, \frac{1}{H_1^*} \right)$$

e $N = 2K - 1$, de tal forma que

$$\sum_{l=0}^{2K-1} b_l e^{-i2\pi k \frac{l}{2K}} = \hat{H}_k, \quad k = 0, \dots, K.$$

Desenho de filtro IIR só-polos

Podemos definir $b \in \mathbb{R}^{2K}$ através da expressão

$$b_l = iDFT(\hat{H})_l = \sum_{k=0}^{2K-1} \hat{H}_k e^{i2\pi l \frac{k}{2K}}.$$

Supondo que $b_0 \neq 0$, a definição acima produzirá um filtro IIR com $N = 2K - 1$ polos, dado pela equação

$$y(n) = \frac{1}{b_0}x(n) - \sum_{l=1}^N \frac{b_l}{b_0}y(n-l),$$

cuja resposta em frequência contínua $H(e^{i\omega})$ passará exatamente pelos pontos H_0, H_1, \dots, H_K nas frequências $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_K$.

Desenho de filtro IIR só-polos

Aqui se aplicam os mesmos comentários de antes: a resposta em frequência contínua pode ter um comportamento imprevisto fora dos pontos de controle, estando à disposição as alternativas de aumentar a ordem do filtro (e o custo computacional) ou reposicionar os polos do filtro.

Os polos têm efeito de amplificação nas frequências próximas, e interferem indiretamente na posição dos picos (cujas formas exatas dependem do efeito global de todos os polos).

Exemplo: desenho de filtros

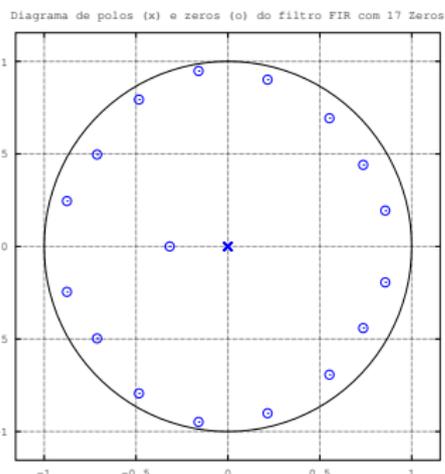
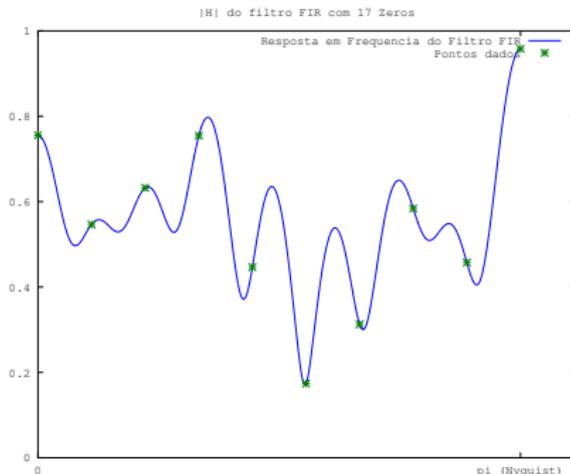
Aplicamos as estratégias acima a um vetor H de $K + 1 = 10$ valores gerados aleatoriamente, com a finalidade de comparar visualmente as respostas em frequência obtidas por uma abordagem FIR só-zeros e uma abordagem IIR só-polos.

Exemplo: desenho de filtros

No primeiro caso o vetor aleatório foi simetrizado ($H_0, \dots, H_K, H_{K-1}^*, \dots, H_1^*$) e a resposta ao impulso h foi obtida pela FFT inversa resultando em um filtro com $M = 2K - 1 = 17$ zeros.

No segundo caso, a expressão $\frac{1}{H_j}$, $j = 0, \dots, K$ foi simetrizada a fim de se obter o vetor de coeficientes recursivos b_l , a partir dos quais se escreveu a função de transferência e a resposta em frequência contínua de um filtro IIR com $N = 2K - 1 = 17$ polos,

Exemplo: desenho de filtro só-zeros



Exemplo: desenho de filtro só-polos

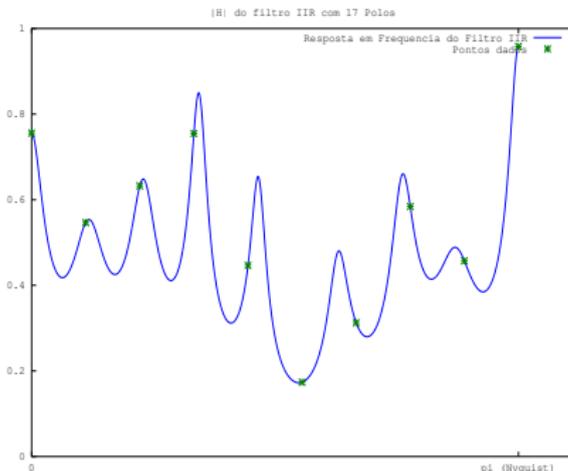


Diagrama de polos (x) e zeros (o) do filtro IIR com 17 Polos

