

Computação Musical - Áudio Digital

*slides do curso MAC0337/5900 – Computação Musical,
baseados no capítulo 2 do livro de F. Richard Moore
*Elements of Computer Music**

Marcelo Queiroz

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

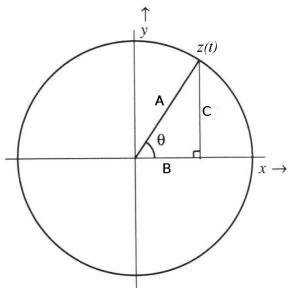
Versão de 25/09/2014

Conteúdo

- Representações sonoras
- Digitalização de som
- Mensuração do espectro
- Filtros digitais

Propriedades de funções trigonométricas

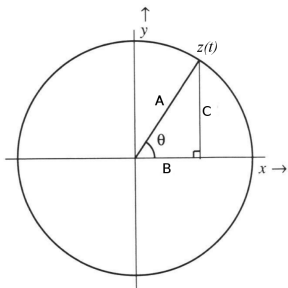
Uma função senoidal pode ser vista como a projeção de um movimento circular uniforme:



$$z(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} A \cos(\omega t + \varphi) \\ A \sin(\omega t + \varphi) \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas cartesianas}} \equiv \overbrace{\begin{bmatrix} \text{magnitude} = A \\ \text{fase}(\theta) = \omega t + \varphi \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas polares}}$$

Propriedades de funções trigonométricas

Uma função senoidal pode ser vista como a projeção de um movimento circular uniforme:

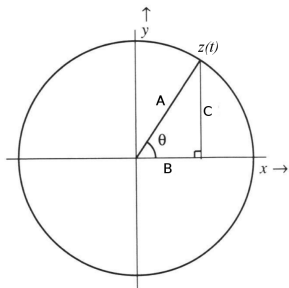


$$z(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} A \cos(\omega t + \varphi) \\ A \sin(\omega t + \varphi) \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas cartesianas}} \equiv \overbrace{\begin{bmatrix} \text{magnitude} = A \\ \text{fase}(\theta) = \omega t + \varphi \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas polares}}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{A} \quad \sin \theta = \frac{C}{A} \quad \tan \theta = \frac{C}{B}$$

Propriedades de funções trigonométricas

Uma função senoidal pode ser vista como a projeção de um movimento circular uniforme:



$$z(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} A \cos(\omega t + \varphi) \\ A \sin(\omega t + \varphi) \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas cartesianas}} \equiv \overbrace{\begin{bmatrix} \text{magnitude} = A \\ \text{fase}(\theta) = \omega t + \varphi \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas polares}}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{A} \quad \sin \theta = \frac{C}{A} \quad \tan \theta = \frac{C}{B}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2} \\ &= \frac{B^2 + C^2}{A^2} \\ &= 1 (\text{Pitágoras}) \end{aligned}$$

Representação de funções trigonométricas

- Lembrando da propriedade:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

Representação de funções trigonométricas

- Lembrando da propriedade:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

temos

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t) \cos(\varphi) + A \cos(\omega t) \sin(\varphi)$$

Representação de funções trigonométricas

- Lembrando da propriedade:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

temos

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t) \cos(\varphi) + A \cos(\omega t) \sin(\varphi)$$

ou ainda

$$A \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$$

onde $a = A \cos(\varphi)$ e $b = \sin(\varphi)$.

Representação de funções trigonométricas

- Lembrando da propriedade:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

temos

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t) \cos(\varphi) + A \cos(\omega t) \sin(\varphi)$$

ou ainda

$$A \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$$

onde $a = A \cos(\varphi)$ e $b = \sin(\varphi)$.

- Ou seja, qualquer senoide dada por uma amplitude A e uma fase inicial φ pode ser expressa como uma combinação de um seno e um cosseno (de mesma frequência e fase 0).

Representação de funções trigonométricas

- Por outro lado, se $x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$ para a, b arbitrários, podemos encontrar uma representação em amplitude (A) e fase (φ) resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a = A \cos(\varphi) \\ b = A \sin(\varphi) \end{cases}$$

Representação de funções trigonométricas

- Por outro lado, se $x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$ para a, b arbitrários, podemos encontrar uma representação em amplitude (A) e fase (φ) resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a = A \cos(\varphi) \\ b = A \sin(\varphi) \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 = A^2 (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \\ \frac{b}{a} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) \end{cases}$$

Representação de funções trigonométricas

- Por outro lado, se $x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$ para a, b arbitrários, podemos encontrar uma representação em amplitude (A) e fase (φ) resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a = A \cos(\varphi) \\ b = A \sin(\varphi) \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 = A^2 (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \\ \frac{b}{a} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) \end{cases}$$

Ou seja, $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ se definirmos

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right),$$

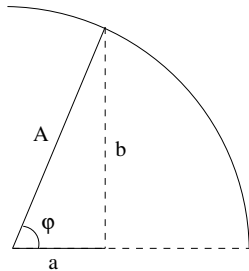
Coordenadas Polares e Cartesianas

- Isso mostra que as representações de senoides em coordenadas *polares* (A, φ) ou *cartesianas* (a, b) são equivalentes:

$$A \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$$

onde

$$\begin{cases} a = A \cos \varphi \\ b = A \sin \varphi \end{cases} \iff \begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{b}{a} \end{cases}$$



Espectros de funções periódicas

- Funções periódicas com período $T \left(= \frac{1}{F_0} = \frac{2\pi}{\omega} \right)$ podem ser escritas utilizando a série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{sen}(k\omega t + \varphi_k) = a_k \text{sen}(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência fundamental da série harmônica
 $\omega_0 = 0, \omega_1 = \omega, \omega_2 = 2\omega, \omega_3 = 3\omega, \dots$

Espectros de funções periódicas

- Funções periódicas com período $T \left(= \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega} \right)$ podem ser escritas utilizando a série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência fundamental da série harmônica
 $\omega_0 = 0, \omega_1 = \omega, \omega_2 = 2\omega, \omega_3 = 3\omega, \dots$

- A obtenção dos coeficientes (A_k, φ_k) ou (a_k, b_k) depende da propriedade de ortogonalidade dos senos e cossenos.

Relações de Ortogonalidade

$$\text{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t)$$

Relações de Ortogonalidade

$$\text{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \text{sen}(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall i, j$$

Relações de Ortogonalidade

$$\text{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \text{sen}(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall i, j$$

$$\cos(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t)$$

Relações de Ortogonalidade

$$\sin(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \sin(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall i, j$$

$$\cos(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall i \neq j,$$

Relações de Ortogonalidade

$$\text{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \text{sen}(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall i, j$$

$$\cos(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall i \neq j,$$

$$\text{sen}(\omega_i t) \perp \text{sen}(\omega_j t)$$

Relações de Ortogonalidade

$$\text{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \text{sen}(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall i, j$$

$$\cos(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall i \neq j,$$

$$\text{sen}(\omega_i t) \perp \text{sen}(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \text{sen}(\omega_i t) \text{sen}(\omega_j t) dt = 0, \quad \forall i \neq j,$$

Relações de Ortogonalidade

Além disso

$$\|\cos(\omega_i t)\|^2 = \int_0^T \cos^2(\omega_i t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall i \neq 0 \\ T & i = 0 \end{cases}$$

Relações de Ortogonalidade

Além disso

$$\|\cos(\omega_i t)\|^2 = \int_0^T \cos^2(\omega_i t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall i \neq 0 \\ T & i = 0 \end{cases}$$

$$\|\sin(\omega_i t)\|^2 = \int_0^T \sin^2(\omega_i t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall i \neq 0 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

Coeficientes da Série de Fourier

Vamos agora usar as relações de ortogonalidade para obter os

valores de a_i e b_i na expressão $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$.

Coeficientes da Série de Fourier

Vamos agora usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de a_i e b_i na expressão $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$.

Para isolar cada a_j (ou b_j) devemos multiplicar a expressão acima por uma função ortogonal ao seno (ou cosseno) correspondente.

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando a expressão anterior por $\sin(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\int_0^T f(t) \sin(\omega_j t) dt$$

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando a expressão anterior por $\sin(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\int_0^T f(t) \sin(\omega_j t) dt = \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt$$

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando a expressão anterior por $\sin(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \sin(\omega_j t) dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt \right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt \right)\end{aligned}$$

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando a expressão anterior por $\sin(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \sin(\omega_j t) dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt \right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt \right) \\ &= a_j \frac{T}{2}\end{aligned}$$

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando a expressão anterior por $\sin(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \sin(\omega_j t) dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt \right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t) \sin(\omega_j t) dt \right) \\ &= a_j \frac{T}{2}\end{aligned}$$

de onde

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_j t) dt, \quad \forall j \neq 0.$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt = \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) \cos(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) \cos(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \sin(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \right)\end{aligned}$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) \cos(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \sin(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \right) \\ &= b_j \frac{T}{2}\end{aligned}$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) \cos(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \sin(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) dt \right) \\ &= b_j \frac{T}{2}\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt, \quad \forall j \neq 0.$$

Coeficientes da Série de Fourier

O valor de b_0 pode ser obtido de modo análogo, lembrando que a última integral possui valor T quando $j = 0$:

Coeficientes da Série de Fourier

O valor de b_0 pode ser obtido de modo análogo, lembrando que a última integral possui valor T quando $j = 0$:

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Coeficientes da Série de Fourier

O valor de b_0 pode ser obtido de modo análogo, lembrando que a última integral possui valor T quando $j = 0$:

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

O valor a_0 na realidade é irrelevante para a decomposição pois aparece multiplicado por $\sin(\omega_0 t) = \sin(0t) = 0$, e pode ser definido arbitrariamente como $a_0 = 0$.

Equações de Análise e Síntese

As equações

$$a_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_j t) dt, & \forall j \neq 0 \\ 0, & \text{se } j = 0 \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt, & \forall j \neq 0 \\ \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, & \text{se } j = 0 \end{cases}$$

são denominadas *equações de análise*, pois permitem decompor (analisar) a função original como soma de funções mais simples

Equações de Análise e Síntese

As equações

$$a_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_j t) dt, & \forall j \neq 0 \\ 0, & \text{se } j = 0 \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_j t) dt, & \forall j \neq 0 \\ \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, & \text{se } j = 0 \end{cases}$$

são denominadas *equações de análise*, pois permitem decompor (analisar) a função original como soma de funções mais simples, que são combinadas através da *equação de síntese*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t).$$

Harmônicos do sinal $f(t)$

Cada uma das funções

$$h_i(t) = a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$$

é chamada de (i -ésimo) *harmônico* da função $f(t)$ original

Harmônicos do sinal $f(t)$

Cada uma das funções

$$h_i(t) = a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$$

é chamada de (i -ésimo) *harmônico* da função $f(t)$ original, e possui a forma de uma senoide

$$h_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

onde $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ e $\varphi_i = \tan^{-1} \frac{b_i}{a_i}$.

Harmônicos do sinal $f(t)$

Cada uma das funções

$$h_i(t) = a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$$

é chamada de (i -ésimo) *harmônico* da função $f(t)$ original, e possui a forma de uma senoide

$$h_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

onde $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ e $\varphi_i = \tan^{-1} \frac{b_i}{a_i}$. A componente D.C. é

$$h_0(t) \equiv b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

e corresponde ao valor médio do sinal.

Números complexos

- A unidade complexa é definida a partir da equação $x^2 + 1 = 0$, que não admite solução em $\mathbb{R}$, porém a hipótese de existência de uma solução fora da reta real não é inconsistente (não gera contradição).

Números complexos

- A unidade complexa é definida a partir da equação $x^2 + 1 = 0$, que não admite solução em $\mathbb{R}$, porém a hipótese de existência de uma solução fora da reta real não é inconsistente (não gera contradição).
- Postula-se assim uma solução denotada por i que satisfaz $i^2 = -1$ (de onde segue também que $(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1$).

Números complexos

- A unidade complexa é definida a partir da equação $x^2 + 1 = 0$, que não admite solução em $\mathbb{R}$, porém a hipótese de existência de uma solução fora da reta real não é inconsistente (não gera contradição).
- Postula-se assim uma solução denotada por i que satisfaz $i^2 = -1$ (de onde segue também que $(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1$).
- Números complexos têm a forma $x = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$, e obedecem aos mesmos axiomas que os números reais em relação às operações elementares.

Relação de Euler

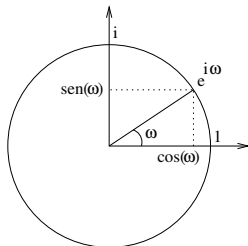
A Relação de Euler

$$e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\sin(\omega)$$

explicita a representação Cartesiana do número complexo $e^{i\omega}$, que em coordenadas polares é dado por

$$|e^{i\omega}| = \sqrt{\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)} = 1$$

$$\angle e^{i\omega} = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)} \right) = \tan^{-1} \tan(\omega) = \omega$$



Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$e^{-i\omega}$$

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$e^{-i\omega} = e^{i(-\omega)}$$

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$\begin{aligned}e^{-i\omega} &= e^{i(-\omega)} \\ &= \cos(-\omega) + i\sin(-\omega)\end{aligned}$$

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$\begin{aligned}e^{-i\omega} &= e^{i(-\omega)} \\&= \cos(-\omega) + i\sin(-\omega) \\&= \cos(\omega) - i\sin(\omega)\end{aligned}$$

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$\begin{aligned}e^{-i\omega} &= e^{i(-\omega)} \\&= \cos(-\omega) + i\sin(-\omega) \\&= \cos(\omega) - i\sin(\omega)\end{aligned}$$

ou ainda, $e^{-i\omega} = (e^{i\omega})^*$ (* denota a operação de conjugação, definida por $(a + ib)^* = a - ib$).

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$\begin{aligned}e^{-i\omega} &= e^{i(-\omega)} \\&= \cos(-\omega) + i\operatorname{sen}(-\omega) \\&= \cos(\omega) - i\operatorname{sen}(\omega)\end{aligned}$$

ou ainda, $e^{-i\omega} = (e^{i\omega})^*$ (* denota a operação de conjugação, definida por $(a + ib)^* = a - ib$). A partir das expressões $e^{-i\omega} = \cos(\omega) - i\operatorname{sen}(\omega)$ e $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\operatorname{sen}(\omega)$ podemos obter:

$$\cos(\omega) = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\omega) = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo, a relação $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ pode ser verificada assim:

$$\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo, a relação $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ pode ser verificada assim:

$$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} + \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo, a relação $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ pode ser verificada assim:

$$\begin{aligned}
 \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} + \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \\
 &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib}) + (e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})}{4i}
 \end{aligned}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo, a relação $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ pode ser verificada assim:

$$\begin{aligned}
 \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} + \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \\
 &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib}) + (e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})}{4i} \\
 &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})e^{ib}-e^{-ia}e^{ib} - (e^{ia}+e^{-ia})e^{-ib}+e^{ia}e^{-ib} + e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{ib} - (e^{ia}-e^{-ia})e^{-ib}+e^{ia}e^{-ib}}{4i}
 \end{aligned}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo, a relação $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ pode ser verificada assim:

$$\begin{aligned}
 \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} + \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \\
 &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib}) + (e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})}{4i} \\
 &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})e^{ib}-e^{-ia}e^{ib} - (e^{ia}+e^{-ia})e^{-ib}+e^{ia}e^{-ib} + e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{4i} \\
 &= \frac{e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}+e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{4i}
 \end{aligned}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo, a relação $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ pode ser verificada assim:

$$\begin{aligned}
 \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} + \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \\
 &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib}) + (e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})}{4i} \\
 &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})e^{ib}-e^{-ia}e^{ib} - (e^{ia}+e^{-ia})e^{-ib}+e^{ia}e^{-ib} + e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{4i} \\
 &= \frac{e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}+e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{4i} \\
 &= \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i}
 \end{aligned}$$

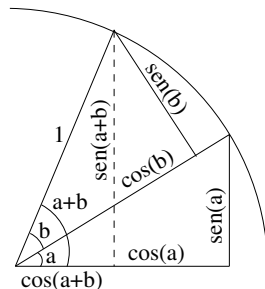
Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo, a relação $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ pode ser verificada assim:

$$\begin{aligned}
 \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} + \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \\
 &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib})+(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})}{4i} \\
 &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})e^{ib}-e^{-ia}e^{ib}-(e^{ia}+e^{-ia})e^{-ib}+e^{ia}e^{-ib}+e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{4i} \\
 &= \frac{e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}+e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{4i} \\
 &= \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i} \\
 &= \sin(a+b)
 \end{aligned}$$

Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:

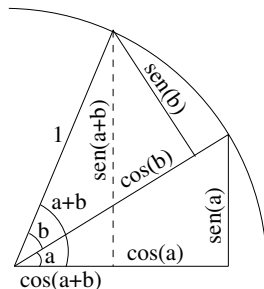


Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:

Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{(e^{ia} + e^{-ia})}{2} \frac{(e^{ib} + e^{-ib})}{2}$$

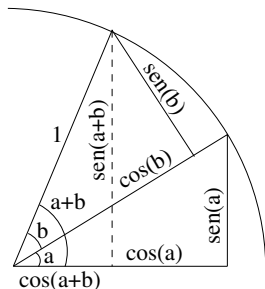


Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:

Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\begin{aligned}\cos(a) \cos(b) &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})}{2} \frac{(e^{ib} + e^{-ib})}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)})}{2}\end{aligned}$$

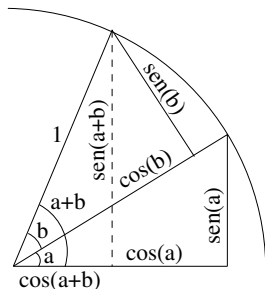


Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:

Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\begin{aligned}
 \cos(a) \cos(b) &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})}{2} \frac{(e^{ib} + e^{-ib})}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)})}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b)
 \end{aligned}$$



Funções exponenciais complexas

Dado um valor qualquer $\omega \in \mathbb{R}$, a função $z(t) = (e^{i\omega})^t = e^{i\omega t}$

Funções exponenciais complexas

Dado um valor qualquer $\omega \in \mathbb{R}$, a função $z(t) = (e^{i\omega})^t = e^{i\omega t}$ descreve um movimento circular uniforme no plano complexo com velocidade angular ω rad/seg:

Funções exponenciais complexas

Dado um valor qualquer $\omega \in \mathbb{R}$, a função $z(t) = (e^{i\omega})^t = e^{i\omega t}$ descreve um movimento circular uniforme no plano complexo com velocidade angular ω rad/seg:

$$z(0) = (e^{i\omega})^0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1,$$

Funções exponenciais complexas

Dado um valor qualquer $\omega \in \mathbb{R}$, a função $z(t) = (e^{i\omega})^t = e^{i\omega t}$ descreve um movimento circular uniforme no plano complexo com velocidade angular ω rad/seg:

$$\begin{aligned} z(0) &= (e^{i\omega})^0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1, \\ z(1) &= (e^{i\omega})^1 = \cos(\omega) + i\sin(\omega), \end{aligned}$$

Funções exponenciais complexas

Dado um valor qualquer $\omega \in \mathbb{R}$, a função $z(t) = (e^{i\omega})^t = e^{i\omega t}$ descreve um movimento circular uniforme no plano complexo com velocidade angular ω rad/seg:

$$\begin{aligned}z(0) &= (e^{i\omega})^0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1, \\z(1) &= (e^{i\omega})^1 = \cos(\omega) + i\sin(\omega), \\z(2) &= (e^{i\omega})^2 = e^{i(2\omega)} = \cos(2\omega) + i\sin(2\omega), \\&= \cos^2(\omega) - \sin^2(\omega) + 2i\cos(\omega)\sin(\omega)\end{aligned}$$

Funções exponenciais complexas

Dado um valor qualquer $\omega \in \mathbb{R}$, a função $z(t) = (e^{i\omega})^t = e^{i\omega t}$ descreve um movimento circular uniforme no plano complexo com velocidade angular ω rad/seg:

$$z(0) = (e^{i\omega})^0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1,$$

$$z(1) = (e^{i\omega})^1 = \cos(\omega) + i\sin(\omega),$$

$$\begin{aligned} z(2) &= (e^{i\omega})^2 = e^{i(2\omega)} = \cos(2\omega) + i\sin(2\omega), \\ &= \cos^2(\omega) - \sin^2(\omega) + 2i\cos(\omega)\sin(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(3) &= (e^{i\omega})^3 = e^{i(3\omega)} = \cos(3\omega) + i\sin(3\omega), \\ &= \cos(2\omega)\cos(\omega) - \sin(2\omega)\sin(\omega) + i(\sin(2\omega)\cos(\omega) + \\ &= (\cos^2(\omega) - \sin^2(\omega))\cos(\omega) - 2\cos(\omega)\sin(\omega)\sin(\omega) \\ &\quad + i(2\cos^2(\omega)\sin(\omega) + (\cos^2(\omega) - \sin^2(\omega))\sin(\omega)) \end{aligned}$$

Funções exponenciais complexas

Funções senoidais reais podem ser expressas combinando-se funções exponenciais complexas:

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2} = \frac{A}{2} e^{i\varphi} z(t) + \frac{A}{2} (e^{i\varphi})^* z(t)^*.$$

Funções exponenciais complexas

Funções senoidais reais podem ser expressas combinando-se funções exponenciais complexas:

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A \frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2} = \frac{A}{2} e^{i\varphi} z(t) + \frac{A}{2} (e^{i\varphi})^* z(t)^*.$$

Nosso objetivo agora será escrever funções periódicas gerais como combinação de funções exponenciais complexas.

Série complexa de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ com período T . Vamos tentar encontrar valores complexos $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tais que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $\omega_n = n\omega$.

Relações de Ortogonalidade

As funções $e^{i\omega_n t}$ e $e^{i\omega_m t}$ são *ortogonais*, ou seja,

$$\int_0^T e^{i\omega_n t} (e^{i\omega_m t})^* dt = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} dt = 0, \quad \forall n \neq m.$$

Relações de Ortogonalidade

As funções $e^{i\omega_n t}$ e $e^{i\omega_m t}$ são *ortogonais*, ou seja,

$$\int_0^T e^{i\omega_n t} (e^{i\omega_m t})^* dt = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} dt = 0, \quad \forall n \neq m.$$

Além disso, para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\|e^{i\omega_n t}\|^2 = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_n t} dt = T.$$

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$.

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t} dt = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} dt$$

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t} dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} dt\end{aligned}$$

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t} dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} dt = F_m T\end{aligned}$$

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t} dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} dt = F_m T\end{aligned}$$

ou seja, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$,

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

Equações de Análise e Síntese

Equação de Análise:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Equações de Análise e Síntese

Equação de Análise:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Equação de Síntese:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$F_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega - n t} dt$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_{-n}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^* (e^{-i\omega_{-n}t})^* dt \end{aligned}$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_{-n}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^* (e^{-i\omega_{-n}t})^* dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t) e^{-i\omega_n t})^* dt \end{aligned}$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_{-n}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^* (e^{-i\omega_{-n}t})^* dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t) e^{-i\omega_{-n}t})^* dt \\ &= \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_{-n}t} dt \right)^* \end{aligned}$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_{-n}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^* (e^{-i\omega_{-n}t})^* dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t) e^{-i\omega_{-n}t})^* dt \\ &= \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_{-n}t} dt \right)^* = F_n^*. \end{aligned}$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$.

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t})$, temos que o n -ésimo harmônico de f é dado por

$$h_n(t) = F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t}$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t})$, temos que o n -ésimo harmônico de f é dado por

$$\begin{aligned} h_n(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \\ &= \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t} \end{aligned}$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t})$, temos que o n -ésimo harmônico de f é dado por

$$\begin{aligned}
 h_n(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \\
 &= \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t} \\
 &= \alpha_n \left(e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} + e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} \right)
 \end{aligned}$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t})$, temos que o n -ésimo harmônico de f é dado por

$$\begin{aligned}
 h_n(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \\
 &= \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t} \\
 &= \alpha_n \left(e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} + e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} \right) \\
 &= 2\alpha_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).
 \end{aligned}$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t})$, temos que o n -ésimo harmônico de f é dado por

$$\begin{aligned}
 h_n(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \\
 &= \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t} \\
 &= \alpha_n \left(e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} + e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} \right) \\
 &= 2\alpha_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).
 \end{aligned}$$

Voltamos aos reais!

Coeficiente D.C.

- Para $n = 0$ o coeficiente F_0 é calculado como

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

e corresponde ao valor médio da função f .

Coefficiente D.C.

- Para $n = 0$ o coeficiente F_0 é calculado como

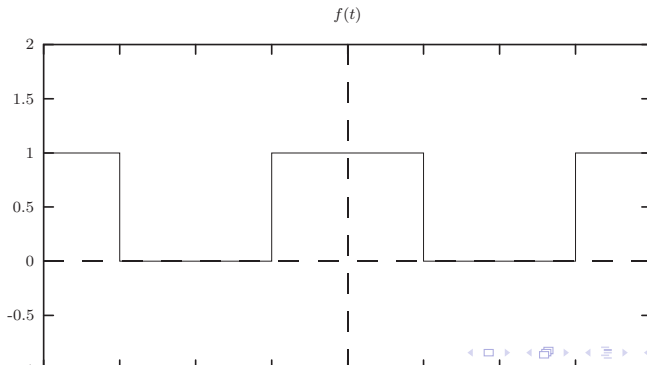
$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

e corresponde ao valor médio da função f .

- Este “harmônico” tem a função de transladar verticalmente os demais harmônicos (que oscilam entre $+2\alpha_n$ e $-2\alpha_n$) para a “posição correta” da função f .

Exemplo: onda quadrada

Exemplo: Considere a função $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t \leq -1 \\ 1, & -1 < t \leq 1 \\ 0, & -1 < t \leq 2 \\ f(t+4), & \forall t \end{cases}$



Exemplo: onda quadrada

Temos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_n = n\frac{\pi}{2}$.

Exemplo: onda quadrada

Temos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_n = n\frac{\pi}{2}$. Assim, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-i\omega_n t} dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-i\omega_n} - e^{i\omega_n}}{-i\omega_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(\omega_n)}{\omega_n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Exemplo: onda quadrada

Temos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_n = n\frac{\pi}{2}$. Assim, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-i\omega_n t} dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-i\omega_n} - e^{i\omega_n}}{-i\omega_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(\omega_n)}{\omega_n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

e para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{2}$.

Exemplo: onda quadrada

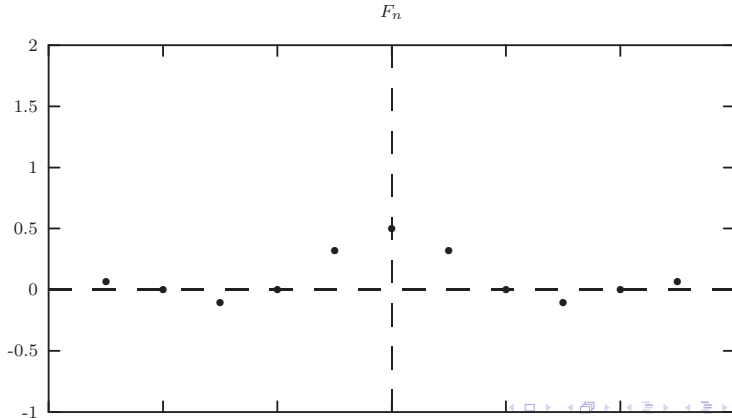
Temos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_n = n\frac{\pi}{2}$. Assim, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-i\omega_n t} dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-i\omega_n} - e^{i\omega_n}}{-i\omega_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(\omega_n)}{\omega_n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

e para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Observe que os extremos de integração utilizados nas contas acima foram $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Qualquer período completo pode ser utilizado.

Exemplo: onda quadrada

Espectro da onda quadrada:



Exemplo: onda quadrada

Pela equação de síntese,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$$

Exemplo: onda quadrada

Pela equação de síntese,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\dots + \frac{1}{5} e^{-i5\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3} e^{-i3\frac{\pi}{2}t} + e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{\pi}{2} + e^{i\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3} e^{i3\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{5} e^{i5\frac{\pi}{2}t} - \dots \right] \end{aligned}$$

Exemplo: onda quadrada

Pela equação de síntese,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\dots + \frac{1}{5} e^{-i5\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3} e^{-i3\frac{\pi}{2}t} + e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{\pi}{2} + e^{i\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3} e^{i3\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{5} e^{i5\frac{\pi}{2}t} - \dots \right] \end{aligned}$$

e o n -ésimo harmônico (para n ímpar) é dado por

$$h_n(t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\pi} [e^{-in\frac{\pi}{2}t} + e^{in\frac{\pi}{2}t}]$$

Exemplo: onda quadrada

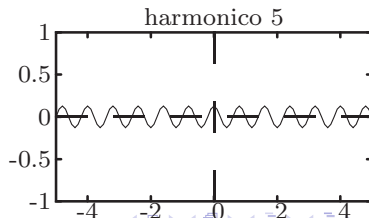
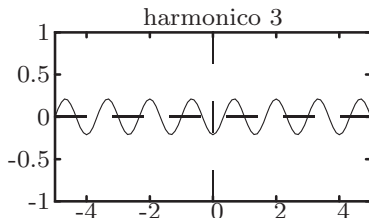
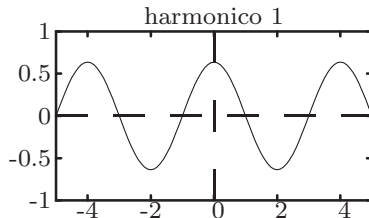
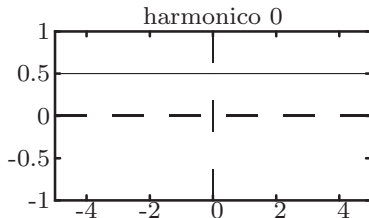
Pela equação de síntese,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\dots + \frac{1}{5} e^{-i5\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3} e^{-i3\frac{\pi}{2}t} + e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{\pi}{2} + e^{i\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3} e^{i3\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{5} e^{i5\frac{\pi}{2}t} - \dots \right] \end{aligned}$$

e o n -ésimo harmônico (para n ímpar) é dado por

$$h_n(t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\pi} [e^{-in\frac{\pi}{2}t} + e^{in\frac{\pi}{2}t}] = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right).$$

Harmônicos da onda quadrada



Funções pares e ímpares

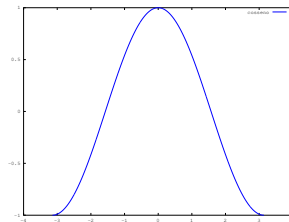
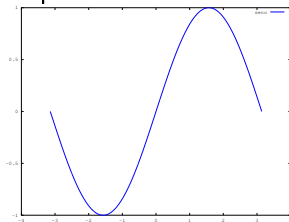
- Uma função f é **par** se satisfaz $f(t) = f(-t)$, $\forall t$.

Funções pares e ímpares

- Uma função f é **par** se satisfaz $f(t) = f(-t)$, $\forall t$.
- Uma função f é **ímpar** se satisfaz $f(t) = -f(-t)$, $\forall t$.

Funções pares e ímpares

- Uma função f é **par** se satisfaz $f(t) = f(-t)$, $\forall t$.
- Uma função f é **ímpar** se satisfaz $f(t) = -f(-t)$, $\forall t$.
- Exemplos de função par e função ímpar são $\cos(t)$ e $\sin(t)$, respectivamente.



Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.

Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.
- Se f e g são ímpares, fg é par.

Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.
- Se f e g são ímpares, fg é par.
- Se f é par e g é ímpar, fg é ímpar.

Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.
- Se f e g são ímpares, fg é par.
- Se f é par e g é ímpar, fg é ímpar.
- Se f é par, $\int_{-U}^U f(t) dt = 2 \int_0^U f(t) dt$.

Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.
- Se f e g são ímpares, fg é par.
- Se f é par e g é ímpar, fg é ímpar.
- Se f é par, $\int_{-U}^U f(t) dt = 2 \int_0^U f(t) dt$.
- Se f é ímpar, $\int_{-U}^U f(t) dt = 0$.

Paridade dos coeficientes de Fourier

Seja $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ (formas Cartesiana e polar).

Paridade dos coeficientes de Fourier

Seja $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ (formas Cartesiana e polar). Note que

$$\begin{cases} A_n = \alpha_n \cos \varphi_n \\ B_n = \alpha_n \sin \varphi_n \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n = \tan^{-1} \frac{B_n}{A_n} \end{cases}$$

Paridade dos coeficientes de Fourier

Seja $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ (formas Cartesiana e polar). Note que

$$\begin{cases} A_n = \alpha_n \cos \varphi_n \\ B_n = \alpha_n \sin \varphi_n \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n = \tan^{-1} \frac{B_n}{A_n} \end{cases}$$

Lembrando que $F_{-n} = F_n^*$ temos $A_{-n} + iB_{-n} = A_n - iB_n$ e também $\alpha_{-n} e^{i\varphi_{-n}} = \alpha_n e^{i(-\varphi_n)}$

Paridade dos coeficientes de Fourier

Seja $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ (formas Cartesiana e polar). Note que

$$\begin{cases} A_n = \alpha_n \cos \varphi_n \\ B_n = \alpha_n \sin \varphi_n \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n = \tan^{-1} \frac{B_n}{A_n} \end{cases}$$

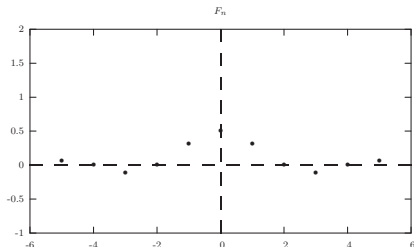
Lembrando que $F_{-n} = F_n^*$ temos $A_{-n} + iB_{-n} = A_n - iB_n$ e também $\alpha_{-n} e^{i\varphi_{-n}} = \alpha_n e^{i(-\varphi_n)}$, de onde segue imediatamente o resultado:

- A_n e α_n são funções pares do argumento n , bem como
- B_n e φ_n são funções ímpares de n .

Retomando o exemplo da onda quadrada

Vimos que a função $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t \leq -1 \\ 1, & -1 < t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 2 \\ f(t+4), & \forall t \end{cases}$ possui coeficientes de Fourier dados por

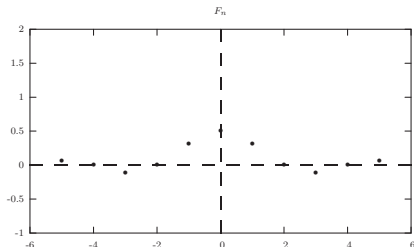
$$F_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n\pi} & n \text{ ímpar} \\ 0 & n \neq 0 \text{ par} \\ \frac{1}{2} & n = 0. \end{cases}$$



Retomando o exemplo da onda quadrada

Vimos que a função $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t \leq -1 \\ 1, & -1 < t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 2 \\ f(t+4), & \forall t \end{cases}$ possui coeficientes de Fourier dados por

$$F_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n\pi} & n \text{ ímpar} \\ 0 & n \neq 0 \text{ par} \\ \frac{1}{2} & n = 0. \end{cases}$$



Observe que F_n é real e consequentemente par.

Decomposição em f_{par} e f_{impar}

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; definimos as funções

$$f_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$$

$$f_{\text{impar}}(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

Decomposição em f_{par} e f_{impar}

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; definimos as funções

$$f_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$$

$$f_{\text{impar}}(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

É fácil mostrar que f_{par} é uma função par e f_{impar} é uma função ímpar.

Decomposição em f_{par} e f_{impar}

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; definimos as funções

$$f_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$$

$$f_{\text{impar}}(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

É fácil mostrar que f_{par} é uma função par e f_{impar} é uma função ímpar. Mais ainda,

$$\begin{aligned} f_{\text{par}}(t) + f_{\text{impar}}(t) &= \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] \\ &= \frac{1}{2} [f(t) + f(-t) + f(t) - f(-t)] = f(t). \end{aligned}$$

Espectros de f_{par} e f_{impar}

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica e seja $\{F_n = A_n + iB_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a série complexa de Fourier associada a f .

Espectros de f_{par} e f_{impar}

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica e seja $\{F_n = A_n + iB_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a série complexa de Fourier associada a f . Então

- $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a f_{par} e
- $\{iB_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a f_{impar} .

Espectros de f_{par} e f_{impar}

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica e seja $\{F_n = A_n + iB_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a série complexa de Fourier associada a f . Então

- $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a f_{par} e
- $\{iB_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a f_{impar} .

Prova: notas de aula sobre Fourier.

Corolário

Duas consequências imediatas do resultado anterior são:

$$f(t) \text{ é par } \iff F(n) \text{ é real e par}$$

Corolário

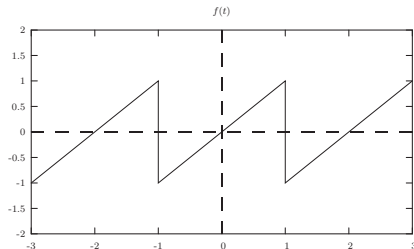
Duas consequências imediatas do resultado anterior são:

$$f(t) \text{ é par } \iff F(n) \text{ é real e par}$$

$$f(t) \text{ é ímpar } \iff F(n) \text{ é imaginária e ímpar}$$

Exemplo: Função Dente-de-Serra

Exemplo: Considere a função



com $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, $\omega_n = n\pi$.

Espectro da Função Dente-de-Serra

Para $n \neq 0$,

$$F_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Espectro da Função Dente-de-Serra

Para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\omega_n t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t e^{-i\omega_n t} dt \end{aligned}$$

Espectro da Função Dente-de-Serra

Para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\omega_n t} dt \\&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t e^{-i\omega_n t} dt \\&= (\dots \text{integração por partes} \dots) \\&= i \frac{(-1)^n}{n\pi}.\end{aligned}$$

Espectro da Função Dente-de-Serra

Para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\omega_n t} dt \\&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t e^{-i\omega_n t} dt \\&= (\dots \text{integração por partes} \dots) \\&= i \frac{(-1)^n}{n\pi}.\end{aligned}$$

Para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t dt = 0.$

Espectro da Função Dente-de-Serra

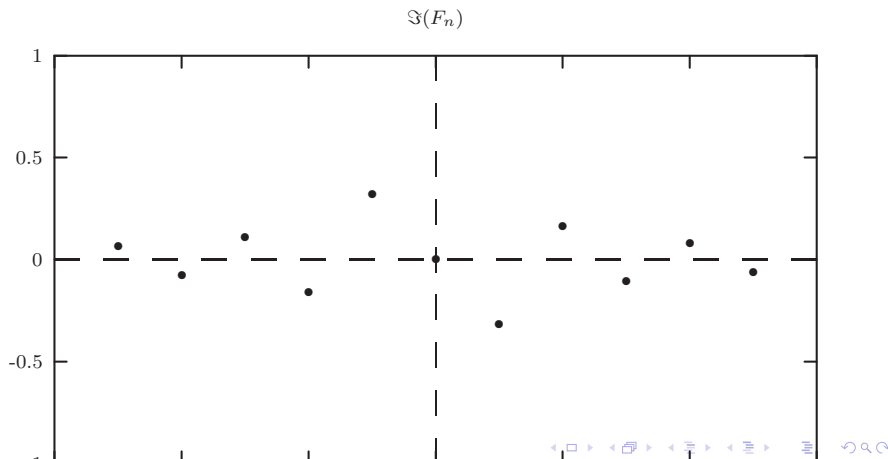
Para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\omega_n t} dt \\&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t e^{-i\omega_n t} dt \\&= (\dots \text{integração por partes} \dots) \\&= i \frac{(-1)^n}{n\pi}.\end{aligned}$$

Para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t dt = 0$.

Observe que F_n é puramente imaginária e consequentemente ímpar.

Espectro da Função Dente-de-Serra



Harmônicos da Função Dente-de-Serra

O n -ésimo harmônico de f é dado por

$$h_n(t) = i \frac{(-1)^{-n}}{-n\pi} e^{-in\pi t} + i \frac{(-1)^n}{n\pi} e^{in\pi t}$$

Harmônicos da Função Dente-de-Serra

O n -ésimo harmônico de f é dado por

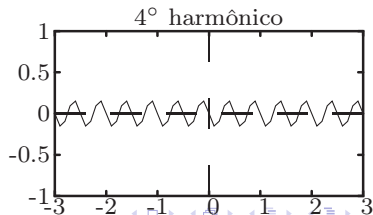
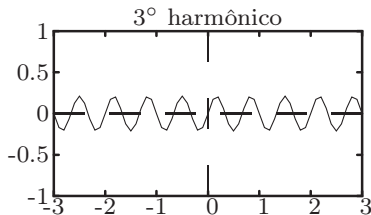
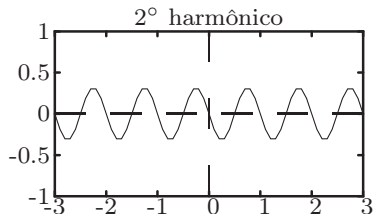
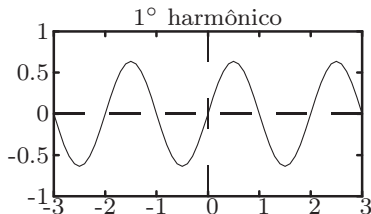
$$\begin{aligned}h_n(t) &= i \frac{(-1)^{-n}}{-n\pi} e^{-in\pi t} + i \frac{(-1)^n}{n\pi} e^{in\pi t} \\&= i \frac{(-1)^n}{n\pi} [e^{in\pi t} - e^{-in\pi t}]\end{aligned}$$

Harmônicos da Função Dente-de-Serra

O n -ésimo harmônico de f é dado por

$$\begin{aligned}h_n(t) &= i \frac{(-1)^{-n}}{-n\pi} e^{-in\pi t} + i \frac{(-1)^n}{n\pi} e^{in\pi t} \\&= i \frac{(-1)^n}{n\pi} [e^{in\pi t} - e^{-in\pi t}] \\&= -2 \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi t).\end{aligned}$$

Harmônicos da Função Dente-de-Serra



Transformada de Fourier Contínua

Se $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é periódica não faz sentido escrevê-la como combinação linear de senos e cossenos harmonicamente relacionados.

Transformada de Fourier Contínua

Se $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é periódica não faz sentido escrevê-la como combinação linear de senos e cossenos harmonicamente relacionados. No entanto, muitas vezes é possível escrevê-la como combinação linear de todos os senos e cossenos que existem, utilizando todas as frequências $\omega \in \mathbb{R}$ disponíveis:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{equação de síntese})$$

Transformada de Fourier Contínua

Para funções que satisfazem

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt < \infty,$$

pode-se provar que os valores de $F(\omega)$ que satisfazem a equação de síntese são dados por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{equação de análise})$$

Transformada de Fourier Contínua

Se $f(t)$ e $F(\omega)$ estão relacionadas pelas equações de análise e síntese, escrevemos

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega).$$

Transformada de Fourier Contínua

Se $f(t)$ e $F(\omega)$ estão relacionadas pelas equações de análise e síntese, escrevemos

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega).$$

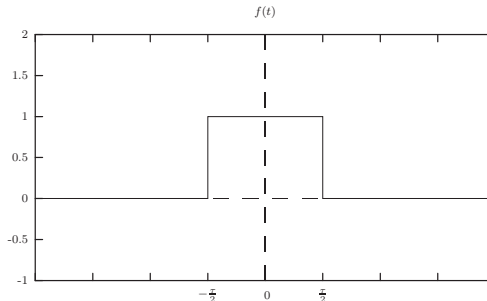
Utilizamos as notações

$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = \alpha(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

para as representações Cartesiana e polar de $F(\omega)$.

Exemplo: Pulso Quadrado

Exemplo: Considere a função



Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t} dt = \tau.$

Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t} dt = \tau.$

Para $\omega \neq 0$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t} dt = \tau$.

Para $\omega \neq 0$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t} dt = \tau$.

Para $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \end{aligned}$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t} dt = \tau$.

Para $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\omega} \left[\frac{e^{i\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega \frac{\tau}{2}}}{2i} \right] \end{aligned}$$

Exemplo: Pulso Quadrado

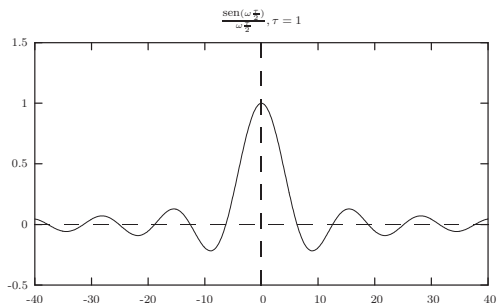
Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t} dt = \tau$.

Para $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\omega} \left[\frac{e^{i\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega \frac{\tau}{2}}}{2i} \right] \\ &= \frac{2\text{sen}(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega} = \tau \frac{\text{sen}(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}}. \end{aligned}$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Espectro do pulso quadrado:



Exemplo: Pulso Quadrado

Assim, pela equação de síntese,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{i\omega t} d\omega.$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Assim, pela equação de síntese,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{i\omega t} d\omega.$$

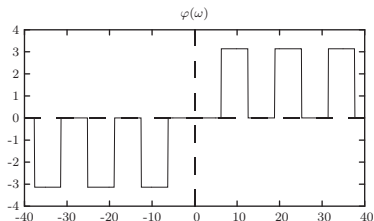
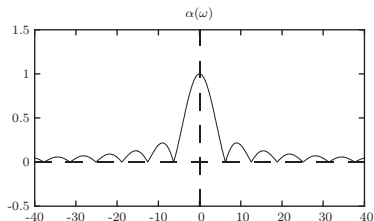
Frequentemente representamos a transformada de Fourier através dos espectros de *amplitude* e *fase*. Neste caso,

$$\alpha(\omega) = \tau \left| \frac{\sin(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} \right|$$

e

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } F(\omega) \geq 0 \\ \pm\pi, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo: Pulso Quadrado



Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:
 $A(\omega)$ e $a(\omega)$ são funções pares.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:

$A(\omega)$ e $a(\omega)$ são funções pares. $f_{\text{par}} \longleftrightarrow A(\omega)$.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:

$A(\omega)$ e $a(\omega)$ são funções pares. $f_{\text{par}} \longleftrightarrow A(\omega)$.
 $B(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ são funções ímpares.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:

$$\begin{array}{ll} A(\omega) \text{ e } a(\omega) \text{ são funções pares.} & f_{\text{par}} \longleftrightarrow A(\omega). \\ B(\omega) \text{ e } b(\omega) \text{ são funções ímpares.} & f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB(\omega). \end{array}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:

$$\begin{aligned} A(\omega) \text{ e } \alpha(\omega) \text{ são funções pares.} & \quad f_{\text{par}} \longleftrightarrow A(\omega). \\ B(\omega) \text{ e } \varphi(\omega) \text{ são funções ímpares.} & \quad f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB(\omega). \end{aligned}$$

$$f(t) \text{ é par} \iff F(\omega) \text{ é real e par.}$$

$$f(t) \text{ é ímpar} \iff F(\omega) \text{ é imaginária e ímpar.}$$

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Propriedade da Área

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = 2\pi f(0).$$

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Propriedade da Área

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0);$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = 2\pi f(0).$$

- Dualidade: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ então

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega).$$

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Propriedade da Área

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0);$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = 2\pi f(0).$$

- Dualidade: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ então

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega).$$

- Mudança de Escala: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\beta \neq 0$ então

$$f(\beta t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\beta|} F\left(\frac{\omega}{\beta}\right).$$

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Deslocamento no Tempo: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\tau \in \mathbb{R}$ então

$$f(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau} F(\omega).$$

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Deslocamento no Tempo: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\tau \in \mathbb{R}$ então

$$f(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau} F(\omega).$$

- Deslocamento na Frequência: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$ então

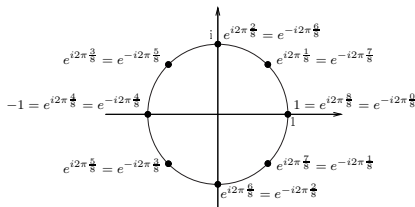
$$e^{i\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0).$$

Raízes Complexas da Unidade

Dado $N \in \mathbb{N}$, considere a família de números complexos

$$\left\{ e^{i2\pi q \frac{1}{N}} \mid q = 0, 1, \dots, N-1 \right\},$$

que divide o círculo unitário em N partes iguais:



Exponenciais Complexas Discretas

Vamos verificar que a família de funções

$$f_q(k) = e^{i2\pi q \frac{k}{N}}, \quad q, k \in \{0, \dots, N-1\}$$

Exponenciais Complexas Discretas

Vamos verificar que a família de funções

$$f_q(k) = e^{i2\pi q \frac{k}{N}}, \quad q, k \in \{0, \dots, N-1\}$$

é ortogonal em relação ao produto interno em $\mathbb{C}^N$ definido por

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^*.$$

Exponenciais Complexas Discretas

Vamos verificar que a família de funções

$$f_q(k) = e^{i2\pi q \frac{k}{N}}, \quad q, k \in \{0, \dots, N-1\}$$

é ortogonal em relação ao produto interno em $\mathbb{C}^N$ definido por

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^*.$$

Para simplificar a notação, vamos utilizar o símbolo $W = e^{i2\pi \frac{1}{N}}$ de tal forma que

$$(W^q)^k = W^{qk} = e^{i2\pi q \frac{k}{N}} = f_q(k).$$

Relações de Ortogonalidade

$$f_q(\cdot) \perp f_r(\cdot), \forall q \neq r$$

e

$$\|f_q\|^2 = N.$$

Relações de Ortogonalidade

$$f_q(\cdot) \perp f_r(\cdot), \forall q \neq r$$

e

$$\|f_q\|^2 = N.$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* = \begin{cases} 0, & \text{se } q \neq r \\ N, & \text{se } q = r. \end{cases}$$

Exemplo:

Considere $N = 5$, $q = 2$ e $r = 3$. Então, para os vetores

$$a = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^2 \\ W^4 \\ W^6 \\ W^8 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^3 \\ W^6 \\ W^9 \\ W^{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{temos } \langle a, b \rangle = W^0 W^0 + W^2 W^{-3} + W^4 W^{-6} + W^6 W^{-9} + W^8 W^{-12} =$$

$$1 + W^{-1} + W^{-2} + W^{-3} + W^{-4} = 0$$

e

$$\langle a, a \rangle = W^0 W^0 + W^2 W^{-2} + W^4 W^{-4} + W^6 W^{-6} + W^8 W^{-8} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^*$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1 - (W^{(q-r)})^N}{1 - W^{(q-r)}}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1 - (W^{(q-r)})^N}{1 - W^{(q-r)}} \\ &= \frac{1 - (W^N)^{(q-r)}}{1 - W^{(q-r)}}\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1 - (W^{(q-r)})^N}{1 - W^{(q-r)}} \\ &= \frac{1 - (W^N)^{(q-r)}}{1 - W^{(q-r)}} = \frac{1 - 1}{1 - W^{(q-r)}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1 - (W^{(q-r)})^N}{1 - W^{(q-r)}} \\
 &= \frac{1 - (W^N)^{(q-r)}}{1 - W^{(q-r)}} = \frac{1 - 1}{1 - W^{(q-r)}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{qk})^*$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1 - (W^{(q-r)})^N}{1 - W^{(q-r)}} \\
 &= \frac{1 - (W^N)^{(q-r)}}{1 - W^{(q-r)}} = \frac{1 - 1}{1 - W^{(q-r)}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{qk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (W^0)^k$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1 - (W^{(q-r)})^N}{1 - W^{(q-r)}} \\
 &= \frac{1 - (W^N)^{(q-r)}}{1 - W^{(q-r)}} = \frac{1 - 1}{1 - W^{(q-r)}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{qk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (W^0)^k = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N. \quad \blacksquare$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Seja $f = (f_0, \dots, f_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$. Vamos tentar encontrar um vetor $F = (F_0, \dots, F_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}.$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Seja $f = (f_0, \dots, f_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$. Vamos tentar encontrar um vetor $F = (F_0, \dots, F_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}.$$

Usando as relações de ortogonalidade, podemos obter os valores de F_n tomando o produto interno de f pela exponencial complexa $f_q(\cdot)$.

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k :

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k :

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \right) e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \right) e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi n \frac{k}{N}} e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \right) \end{aligned}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \right) e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k \frac{n}{N}} e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} F_m N. \end{aligned}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \right) e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi n \frac{k}{N}} e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \right) \\
 &= \frac{1}{N} F_m N.
 \end{aligned}$$

ou seja, para $n = 0, \dots, N-1$, $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$.

Síntese e Análise

As equações $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ e $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são chamadas de **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente.

Síntese e Análise

As equações $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ e $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são

chamadas de **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente. Representamos esta relação por $(f_0, \dots, f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_0, \dots, F_{N-1})$ ou simplesmente $f \longleftrightarrow F$.

Síntese e Análise

As equações $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ e $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são chamadas de **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente. Representamos esta relação por $(f_0, \dots, f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_0, \dots, F_{N-1})$ ou simplesmente $f \longleftrightarrow F$.

Utilizamos as notações $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ para as representações Cartesiana e polar de F_n .

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Linearidade: se $f \longleftrightarrow F$, $g \longleftrightarrow G$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$\beta f + \gamma g \longleftrightarrow \beta F + \gamma G.$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Linearidade: se $f \longleftrightarrow F$, $g \longleftrightarrow G$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$\beta f + \gamma g \longleftrightarrow \beta F + \gamma G.$$

- Periodicidade:

As funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas pelas

$$\text{expressões } f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \text{ e } F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

são periódicas com período N .

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Linearidade: se $f \longleftrightarrow F$, $g \longleftrightarrow G$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$\beta f + \gamma g \longleftrightarrow \beta F + \gamma G.$$

- Periodicidade:

As funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas pelas

$$\text{expressões } f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \text{ e } F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

são periódicas com período N .

- Propriedade da Média: $\sum_{k=0}^{N-1} f_k = F_0$ e $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n = f_0$.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Conjugação: $F_{-n} = F_n^*$.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Conjugação: $F_{-n} = F_n^*$.
- Simetria:
 A_n e α_n são funções pares.
 B_n e φ_n são funções ímpares.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Conjugação: $F_{-n} = F_n^*$.

- Simetria:

A_n e α_n são funções pares.

B_n e φ_n são funções ímpares.

$$f_{\text{par}} \longleftrightarrow A_n.$$

$$f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB_n.$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Conjugação: $F_{-n} = F_n^*$.
- Simetria:
 A_n e a_n são funções pares. $f_{\text{par}} \longleftrightarrow A_n$.
 B_n e φ_n são funções ímpares. $f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB_n$.

$f(t)$ é par $\iff F_n$ é real e par.

$f(t)$ é ímpar $\iff F_n$ é imaginária e ímpar.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Dualidade: Se $f \longleftrightarrow F$ então

$$F \longleftrightarrow N(f_0, f_{-1}, f_{-2} \dots, f_{-(N-1)}).$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Dualidade: Se $f \longleftrightarrow F$ então

$$F \longleftrightarrow N(f_0, f_{-1}, f_{-2}, \dots, f_{-(N-1)}).$$

- Deslocamento no Tempo: Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(f_{-m}, f_{1-m}, \dots, f_{N-1-m}) \longleftrightarrow (W^0 F_0, W^m F_1, W^{2m} F_2, \dots, W^{(N-1)m} F_{N-1}).$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Dualidade: Se $f \longleftrightarrow F$ então

$$F \longleftrightarrow N(f_0, f_{-1}, f_{-2}, \dots, f_{-(N-1)}).$$

- Deslocamento no Tempo: Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(f_{-m}, f_{1-m}, \dots, f_{N-1-m}) \longleftrightarrow (W^0 F_0, W^m F_1, W^{2m} F_2, \dots, W^{(N-1)m} F_{N-1}).$$

- Deslocamento na Frequência: Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(W^0 f_0, W^m f_1, W^{2m} f_2, \dots, W^{(N-1)m} f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_m, f_{1+m}, \dots, f_{N-1+m}).$$

Custo Computacional da DFT

O método direto de cálculo da transformada discreta de Fourier a partir da expressão

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{-kn}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

utiliza N^2 produtos entre números complexos e $N(N-1)$ somas, possuindo assim complexidade computacional $\mathcal{O}(N^2)$.

Custo Computacional da DFT

O método direto de cálculo da transformada discreta de Fourier a partir da expressão

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{-kn}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

utiliza N^2 produtos entre números complexos e $N(N-1)$ somas, possuindo assim complexidade computacional $\mathcal{O}(N^2)$.

O método FFT (Fast Fourier Transform) permite obter o mesmo resultado em tempo $\mathcal{O}(N \log N)$.

Método Recursivo para a DFT

A ideia simples do cálculo da DFT por recursão reside em considerar $N = 2^B$ e particionar o vetor $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ em duas partes:

$$f_{\text{par}} = (f_0, f_2, \dots, f_{N-2})$$

e

$$f_{\text{impar}} = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$$

Método Recursivo para a DFT

A ideia simples do cálculo da DFT por recursão reside em considerar $N = 2^B$ e particionar o vetor $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ em duas partes:

$$f_{\text{par}} = (f_0, f_2, \dots, f_{N-2})$$

e

$$f_{\text{impar}} = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$$

e calcular separadamente as DFTs de cada um destes vetores, combinando os resultados.

Divisão e Conquista

Note que
$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

Divisão e Conquista

Note que

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$
$$= \sum_{k \text{ par}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{k \text{ ímpar}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

Divisão e Conquista

Note que

$$\begin{aligned}
 F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k \text{ par}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{k \text{ ímpar}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{-i2\pi n \frac{2k}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-i2\pi n \frac{2k+1}{N}}
 \end{aligned}$$

Divisão e Conquista

Note que

$$\begin{aligned}
 F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k \text{ par}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{k \text{ ímpar}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{-i2\pi n \frac{2k}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-i2\pi n \frac{2k+1}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{par}_k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{ímpar}_k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}}
 \end{aligned}$$

Divisão e Conquista

Note que

$$\begin{aligned}
 F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k \text{ par}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{k \text{ ímpar}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{-i2\pi n \frac{2k}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-i2\pi n \frac{2k+1}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{par}_k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{ímpar}_k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} \\
 &= \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{ímpar}})_n
 \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$C(N) = 2C(N/2) + \alpha N$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned} C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\ &= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned} C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\ &= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned}
 C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
 &= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
 &= 4(2C(N/8) + \alpha N/4) + 2\alpha N
 \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned}
 C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
 &= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
 &= 4(2C(N/8) + \alpha N/4) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N
 \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned}
 C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
 &= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
 &= 4(2C(N/8) + \alpha N/4) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\
 &= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N
 \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned}
 C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
 &= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
 &= 4(2C(N/8) + \alpha N/4) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\
 &= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N \\
 &= 2^4 C(N/2^4) + 4\alpha N
 \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned}
 C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
 &= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
 &= 4(2C(N/8) + \alpha N/4) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\
 &= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N \\
 &= 2^4 C(N/2^4) + 4\alpha N \\
 &= \dots \\
 &= 2^B C(N/2^B) + B\alpha N
 \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned}
 C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
 &= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
 &= 4(2C(N/8) + \alpha N/4) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\
 &= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N \\
 &= 2^4 C(N/2^4) + 4\alpha N \\
 &= \dots \\
 &= 2^B C(N/2^B) + B\alpha N \\
 &= NC(1) + B\alpha N \\
 &= \mathcal{O}(N \log N)
 \end{aligned}$$

“Bins” da DFT e frequências reais

Retomando a equação de síntese
$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k}$$

“Bins” da DFT e frequências reais

Retomando a equação de síntese $f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k}$

vemos que as funções elementares são dadas por

$$g_n[k] = e^{i2\pi \frac{n}{N} k},$$

ou seja, uma exponencial complexa com frequência $\hat{\omega}_n = 2\pi \frac{n}{N}$ radianos por amostra.

“Bins” da DFT e frequências reais

Para relacionar isso com o tempo, temos 1 amostra = $\frac{1}{R}$ segundos, de onde as frequências equivalentes em rad/seg e em Hz serão

$$\omega_n = R\hat{\omega}_n = 2\pi R \frac{n}{N} \text{ rad/seg}$$

$$\mathcal{F}_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = R \frac{n}{N} \text{ Hz}$$

“Bins” da DFT e frequências reais

Cada vetor DFT representa então coeficientes associados às frequências (em Hz)

$$0, \frac{R}{N}, 2\frac{R}{N}, 3\frac{R}{N}, \dots, \frac{N}{2}\frac{R}{N}$$

“Bins” da DFT e frequências reais

Cada vetor DFT representa então coeficientes associados às frequências (em Hz)

$$0, \frac{R}{N}, 2\frac{R}{N}, 3\frac{R}{N}, \dots, \frac{N}{2}\frac{R}{N} = \frac{R}{2}(\text{Nyquist}),$$

“Bins” da DFT e frequências reais

Cada vetor DFT representa então coeficientes associados às frequências (em Hz)

$$0, \frac{R}{N}, 2\frac{R}{N}, 3\frac{R}{N}, \dots, \frac{N}{2}\frac{R}{N} = \frac{R}{2}(\text{Nyquist}),$$

$$\left(\frac{N}{2} + 1\right)\frac{R}{N}$$

“Bins” da DFT e frequências reais

Cada vetor DFT representa então coeficientes associados às frequências (em Hz)

$$0, \frac{R}{N}, 2\frac{R}{N}, 3\frac{R}{N}, \dots, \frac{N}{2}\frac{R}{N} = \frac{R}{2}(\text{Nyquist}),$$

$$\left(\frac{N}{2} + 1\right)\frac{R}{N} = \left(-\frac{N}{2} + 1\right)\frac{R}{N},$$

“Bins” da DFT e frequências reais

Cada vetor DFT representa então coeficientes associados às frequências (em Hz)

$$0, \frac{R}{N}, 2\frac{R}{N}, 3\frac{R}{N}, \dots, \frac{N}{2}\frac{R}{N} = \frac{R}{2}(\text{Nyquist}),$$

$$\left(\frac{N}{2} + 1\right)\frac{R}{N} = \left(-\frac{N}{2} + 1\right)\frac{R}{N}, \dots, (N-1)\frac{R}{N} = -\frac{R}{N}.$$

DFT e componentes senoidais

Podemos escrever equivalentemente

$$f[k] = \frac{1}{N} \left[F_0 + F_{N/2} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \overbrace{F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_{N-n} e^{i2\pi \frac{N-n}{N} k}}^{h_n[k]} \right]$$

onde $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ e

$$h_n[k] = F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_n^* e^{i2\pi \frac{-n}{N} k}$$

DFT e componentes senoidais

Podemos escrever equivalentemente

$$f[k] = \frac{1}{N} \left[F_0 + F_{N/2} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \overbrace{F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_{N-n} e^{i2\pi \frac{N-n}{N} k}}^{h_n[k]} \right]$$

onde $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ e

$$h_n[k] = F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_n^* e^{i2\pi \frac{-n}{N} k} = \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{i2\pi \frac{-n}{N} k}$$

DFT e componentes senoidais

Podemos escrever equivalentemente

$$f[k] = \frac{1}{N} \left[F_0 + F_{N/2} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \overbrace{F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_{N-n} e^{i2\pi \frac{N-n}{N} k}}^{h_n[k]} \right]$$

onde $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ e

$$\begin{aligned}
 h_n[k] &= F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_n^* e^{i2\pi \frac{-n}{N} k} = \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{i2\pi \frac{-n}{N} k} \\
 &= \alpha_n \left(e^{i(2\pi \frac{n}{N} k + \varphi_n)} + e^{-i(2\pi \frac{n}{N} k + \varphi_n)} \right)
 \end{aligned}$$

DFT e componentes senoidais

Podemos escrever equivalentemente

$$f[k] = \frac{1}{N} \left[F_0 + F_{N/2} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \overbrace{F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_{N-n} e^{i2\pi \frac{N-n}{N} k}}^{h_n[k]} \right]$$

onde $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ e

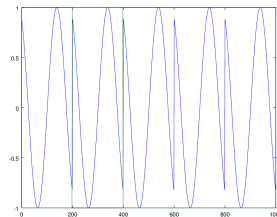
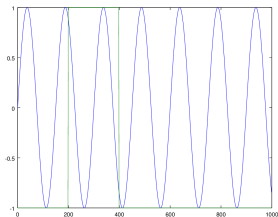
$$\begin{aligned} h_n[k] &= F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_n^* e^{i2\pi \frac{-n}{N} k} = \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{i2\pi \frac{-n}{N} k} \\ &= \alpha_n \left(e^{i(2\pi \frac{n}{N} k + \varphi_n)} + e^{-i(2\pi \frac{n}{N} k + \varphi_n)} \right) = 2\alpha_n \cos(2\pi \frac{n}{N} k + \varphi_n). \end{aligned}$$

DFT e enjanelamento

É importante entender o que acontece quando computamos o espectro de um “recorte” de uma função senoidal.

DFT e enjanelamento

É importante entender o que acontece quando computamos o espectro de um “recorte” de uma função senoidal. Pelas equações de análise e síntese o recorte será “interpretado” como um período de uma função que se repete a cada N amostras:



DFT e enjanelamento

Assim o espectro mostrará uma combinação de componentes que represente o sinal $z[k] = x[k] \cdot w[k]$ onde

$$w[k] = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

DFT e enjanelamento

Assim o espectro mostrará uma combinação de componentes que represente o sinal $z[k] = x[k] \cdot w[k]$ onde

$$w[k] = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Teorema da Convolução: $xy \longleftrightarrow \frac{1}{N}X * Y$ onde

$$(X * Y)_n = \sum_{m=0}^{N-1} X_m Y_{n-m}.$$

Enjanelamento e convolução

Seja $z[k] = x[k] \cdot y[k]$. Então $Z[n]$ será dado por

$$Z[n] = \sum_{k=0}^{N-1} z[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

Enjanelamento e convolução

Seja $z[k] = x[k] \cdot y[k]$. Então $Z[n]$ será dado por

$$Z[n] = \sum_{k=0}^{N-1} z[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

Enjanelamento e convolução

Seja $z[k] = x[k] \cdot y[k]$. Então $Z[n]$ será dado por

$$\begin{aligned}
 Z[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} z[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{i2\pi k \frac{m}{N}} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y_l e^{i2\pi k \frac{l}{N}} \right) e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}
 \end{aligned}$$

Enjanelamento e convolução

Seja $z[k] = x[k] \cdot y[k]$. Então $Z[n]$ será dado por

$$\begin{aligned}
 Z[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} z[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{i2\pi k \frac{m}{N}} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y_l e^{i2\pi k \frac{l}{N}} \right) e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_m Y_l e^{i2\pi k \frac{m+l-n}{N}}
 \end{aligned}$$

Enjanelamento e convolução

$$Z[n] = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_m Y_l \sum_{k=0}^{N-1} \overbrace{e^{j2\pi k \frac{m+l-n}{N}}}^{(m+l-n=0)?N:0}$$

Enjanelamento e convolução

$$\begin{aligned}
 Z[n] &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_m Y_l \sum_{k=0}^{N-1} \overbrace{e^{i2\pi k \frac{m+l-n}{N}}}^{(m+l-n=0)?N:0} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m Y_{n-m}
 \end{aligned}$$

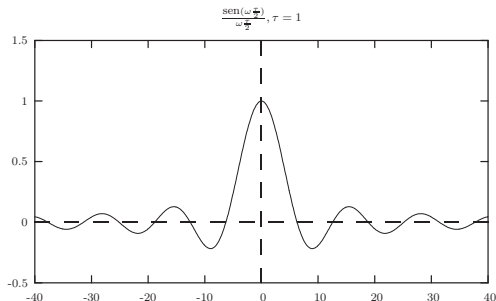
Enjanelamento e convolução

$$\begin{aligned}
 Z[n] &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_m Y_l \sum_{k=0}^{N-1} \overbrace{e^{j2\pi k \frac{m+l-n}{N}}}^{(m+l-n=0)?N:0} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m Y_{n-m}
 \end{aligned}$$

Uma verificação bem parecida vale para os espectros de sinais $x[k]$ e $y[k]$ em tempo infinito.

Enjanelamento e convolução

No caso da janela quadrada, o espectro do sinal desejado é convoluído pela função sinc:



Exemplos em Pd.

Dualidade e teorema da convolução

Pela dualidade da transformada de Fourier, devemos esperar um resultado análogo para a convolução de sinais no domínio do tempo:

Teorema da Convolução (2): $x * y \longleftrightarrow XY$.

Seja $z[k] = (x * y)[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{k-m}$. Então $Z[n]$ será dado por

$$\begin{aligned}
 Z[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} z[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{k-m} \right) e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-i2\pi n \frac{m}{N}} \right) \left(\sum_{l=-m}^{N-1-m} y_l e^{-i2\pi n \frac{l}{N}} \right) \\
 &= X[n] \left(\sum_{l=0}^{N-1} y_l e^{-i2\pi n \frac{l}{N}} \right) = X[n] \cdot Y[n].
 \end{aligned}$$

Convoluções circular e linear

A expressão $(x * y)[k] = \sum_m x_m y_{k-m}$ pode ser interpretada de duas maneiras diferentes e úteis:

- No contexto de sinais discretos e de tempo finito, onde os vetores representando sinal e espectro são implicitamente periódicos, a expressão acima é computada como

$$(x * y)[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{(k-m) \bmod N}$$

e é chamada de convolução *circular*, para a qual vale o teorema da convolução recém-demonstrado.

Convoluções circular e linear

- No contexto de sinais de tempo infinito ($x[k]$, $k \in \mathbb{Z}$), a convolução, chamada *linear*, admite a forma

$$(x * y)[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{k-m},$$

e satisfaz um teorema similar:

$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega), \quad \forall \omega.$$

Convoluções circular e linear

- No contexto de sinais de tempo infinito ($x[k]$, $k \in \mathbb{Z}$), a convolução, chamada *linear*, admite a forma

$$(x * y)[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{k-m},$$

e satisfaz um teorema similar:

$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega), \quad \forall \omega.$$

- Sinais de tempo finito podem ser interpretados como sinais de tempo infinito (com $y[k] = 0$, $\forall k \neq 0, 1, \dots, N-1$).

Convoluções circular e linear

- No contexto de sinais de tempo infinito ($x[k]$, $k \in \mathbb{Z}$), a convolução, chamada *linear*, admite a forma

$$(x * y)[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{k-m},$$

e satisfaz um teorema similar:

$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega), \quad \forall \omega.$$

- Sinais de tempo finito podem ser interpretados como sinais de tempo infinito (com $y[k] = 0$, $\forall k \neq 0, 1, \dots, N-1$). Essa interpretação é útil para estudar filtros aplicados a fluxos de áudio ($x[k]$ é um sinal de duração indeterminada e $y[k]$ é um vetor finito de coeficientes do filtro).