

## 4 Dualidade

### 4.1 Motivação

O estudo de dualidade em programação linear tem suas origens no método de multiplicadores de Lagrange, que foi desenvolvido para minimização de funções diferenciáveis com restrições de igualdade, visando recair em problemas sem restrições. Considere o problema

$$\begin{cases} \min & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.a} & x + y + z = 1 \end{cases}$$

A este problema associamos a função Lagrangeano  $L(x, y, z, p)$ :

$$L(x, y, z, p) = x^2 + y^2 + z^2 + p(1 - x - y - z),$$

onde a variável  $p$  é interpretada como uma penalização (ou preço) que deve ser paga se a restrição  $x + y + z = 1$  for violada. A função Lagrangeano não possui restrições e assim pode ser minimizada procurando pontos de derivada nula em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - p = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - p = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z - p = 0 \end{aligned}$$

o que fornece a solução paramétrica  $x = y = z = \frac{p}{2}$ . Considerando novamente a restrição original  $x + y + z = 1$  descobrimos que a solução é  $x = y = z = \frac{1}{3}$ . O Lagrangeano usando a penalização  $p = \frac{2}{3}$  (associada à solução ótima) pode ser interpretado como uma combinação conveniente da função objetivo e da restrição original, combinação esta que não *força* a restrição  $x + y + z = 1$ , mas torna desinteressante (do ponto de vista da minimização) a opção de violar aquela restrição pagando o preço  $\frac{2}{3}(1 - x - y - z)$  correspondente.

Considere o problema de programação linear na forma canônica

$$(PLC) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Baseadas no livro de Bertsimas & Tsitsiklis: *Introduction to Linear Optimization*.

onde  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , e suponha que este problema possua uma solução ótima  $x^*$ . Associamos a cada restrição  $A_i x = b_i$  uma penalização  $p_i$  e criamos o seguinte problema relaxado:

$$\begin{cases} \min & c'x + p'(b - Ax) \\ \text{s.a} & x \geq 0. \end{cases}$$

A relaxação do problema consiste em permitir vetores  $x$  que não satisfaçam  $Ax = b$ , desde que o preço  $p'(b - Ax)$  seja adicionado à função objetivo. Chamando de  $g(p)$  o valor ótimo deste problema, para um vetor de preços fixado, temos a seguinte propriedade:

$$g(p) = \min_{x \geq 0} [c'x + p'(b - Ax)] \leq c'x^* + \overbrace{p'(b - Ax^*)}^{=0} = c'x^*,$$

e isso explica o uso do termo “problema relaxado”: como o último problema tem mais opções (pontos viáveis) do que o primeiro, ele tem mais possibilidades para a minimização e a chance de encontrar um mínimo mais baixo que o ótimo do problema original.

Outro modo de entender o resultado acima é que cada vetor de preços  $p$  produz um limitante inferior  $g(p)$  para o valor ótimo do (PLC) original. Poderíamos procurar o maior limitante inferior para o valor ótimo do (PLC) de acordo com esta estratégia resolvendo o problema

$$\begin{cases} \max & g(p) \\ \text{s.a} & p \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{x \geq 0} c'x + p'(b - Ax).$$

Este problema é chamado de dual do problema original (chamado de *primal*, neste contexto). Note que

$$\min_{x \geq 0} [c'x + p'(b - Ax)] = p'b + \min_{x \geq 0} (c' - p'A)x$$

e que

$$\min_{x \geq 0} (c' - p'A)x = \begin{cases} 0 & \text{se } c' - p'A \geq 0 \\ -\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como queremos maximizar  $g(p)$ , os vetores  $p$  tais que  $g(p) = -\infty$  não precisam ser considerados. Com isso vemos que o problema dual pode ser expresso equivalentemente como

$$(DLC) \begin{cases} \max & p'b \\ \text{s.a} & A'p \leq c \\ & p \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

onde  $A'p \leq c \iff (A'p)' \leq c' \iff p'A \leq c'$ . Observe que o (PLC) original é equivalente a

$$\min_{x \geq 0} \max_{p \in \mathbf{R}^m} c'x + p'(b - Ax)$$

pois

$$\max_{p \in \mathbf{R}^m} c'x + p'(b - Ax) = \begin{cases} c'x & \text{se } Ax = b \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Outro exemplo: se o problema primal fosse

$$(PL) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \geq b \end{cases}$$

teríamos o problema equivalente

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \max_{p \geq 0} c'x + p'(b - Ax).$$

Note que neste contexto queremos aplicar outro tipo de penalização: queremos garantir que não vale a pena violar a restrição  $Ax \geq b$  na formulação acima. Se existir uma restrição violada  $A_i x < b_i$ , impomos uma multa positiva  $p_i$  muito alta que torne o produto  $p'(b - Ax)$  muito grande (positivo). Isto tornará desinteressante a violação daquela restrição do ponto de vista da minimização. Não podemos permitir preços negativos pois estaríamos desencorajando também a possibilidade de  $A_i x > b_i$ , que é possível no problema original. Note finalmente que

$$\max_{p \geq 0} c'x + p'(b - Ax) = \begin{cases} c'x & \text{se } Ax \geq b \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e que para  $p \geq 0$  conseguimos manter a propriedade

$$g(p) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} c'x + p'(b - Ax) \leq c'x^* + \overbrace{p'(b - Ax^*)}^{\leq 0} \leq c'x^*,$$

ou seja,  $g(p)$  é um limitante inferior para o valor ótimo do (PL). O dual do (PL) corresponde a  $\max_{p \geq 0} g(p)$ , ou equivalentemente,

$$\max_{p \geq 0} \min_{x \in \mathbf{R}^n} c'x + p'(b - Ax) = \max_{p \geq 0} \min_{x \in \mathbf{R}^n} p'b + (c' - p'A)x.$$

Mais uma vez, observando que

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} p'b + (c' - p'A)x = \begin{cases} p'b & \text{se } c' - p'A = 0 \\ -\infty & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

concluiremos que o dual do (PL) acima é equivalente a

$$(DL) \begin{cases} \max & p'b \\ \text{s.a} & A'p = c \\ & p \geq 0 \end{cases}$$

Assim, o sinal dos preços duais deve ser designado de modo a penalizar a violação das restrições primais, isto é, de modo a permitir que a expressão  $p'(b - Ax)$  fique (muito) positiva sempre que a restrição original não é satisfeita; equivalentemente, para todos os pontos viáveis devemos ter  $p'(b - Ax) \leq 0$ , de modo a anular esta parcela ao calcularmos  $\max_p p'(b - Ax)$ . Assim,  $Ax \geq b$  dá origem a preços  $p \geq 0$ , e  $Ax = b$  dá origem a preços  $p \in \mathbb{R}^m$ .

Finalmente, observe que este tipo de transformação também pode ser aplicado a problemas de maximização, seja transformando-os em um problema de minimização equivalentes, seja reformulando as penalizações visando tornar  $p'(b - Ax)$  (muito) negativo, redefinindo  $g(p)$  como um limitante superior para o valor ótimo e entendendo o dual como o problema de encontrar o menor limitante superior para o valor ótimo primal. Como exemplo,

$$\begin{cases} \max & c'x \\ \text{s.a} & Ax \leq b \end{cases}$$

é equivalente a

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \min_{p \geq 0} c'x + p'(b - Ax)$$

cujo dual é

$$\min_{p \geq 0} \overbrace{\max_{x \in \mathbb{R}^n} p'b + (c' - p'A)x}^{g(p)}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} \min & p'b \\ \text{s.a} & A'p = c \\ & p \geq 0 \end{cases}$$

**Exercício 4.1** Calcule os duais dos problemas a seguir:

$$(P_1) \begin{cases} \max & p'b \\ \text{s.a} & A'p \leq c \\ & p \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$(P_2) \begin{cases} \max & p'b \\ \text{s.a} & A'p = c \\ & p \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_3) \begin{cases} \min & p'b \\ \text{s.a} & A'p = c \\ & p \leq 0 \end{cases}$$

## 4.2 O problema dual

Note da discussão anterior que as restrições primais e o sinal dos preços duais estão estreitamente relacionados, bem como o sinal das variáveis primais e a forma das restrições duais. Podemos resumir todas estas relações considerando o problema primal de programação linear a seguir:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad c'x \\ \text{s.a} \quad A_i x \geq b_i, \quad i \in M_1, \\ \quad \quad A_i x \leq b_i, \quad i \in M_2, \\ \quad \quad A_i x = b_i, \quad i \in M_3, \\ \quad \quad x_j \geq 0, \quad j \in N_1, \\ \quad \quad x_j \leq 0, \quad j \in N_2, \\ \quad \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j \in N_3. \end{array} \right.$$

Seguindo o mesmo tipo de argumento da seção anterior, concluiremos que o seu dual é

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad p'b \\ \text{s.a} \quad p_i \geq 0, \quad i \in M_1, \\ \quad \quad p_i \leq 0, \quad i \in M_2, \\ \quad \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad i \in M_3, \\ \quad \quad (A^j)'p \leq c_j, \quad j \in N_1, \\ \quad \quad (A^j)'p \geq c_j, \quad j \in N_2, \\ \quad \quad (A^j)'p = c_j, \quad j \in N_3. \end{array} \right.$$

**Exercício 4.2** *Mostre que (D) é o dual de (P) repetindo os argumentos da seção anterior.*

Note que a cada restrição primal temos uma variável dual associada, e a cada variável primal temos uma restrição dual associada; note que restrições de igualdade estão associadas a variáveis livres de sinal, e restrições de desigualdade estão associadas a variáveis com algum sinal. A função objetivo primal faz parte das restrições duais e o lado direito primal aparece como função objetivo dual.

**Exemplo 4.1** *Considere os problemas primal e dual a seguir:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a} \quad -x_1 + 3x_2 = 5 \\ \quad \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ \quad \quad \quad \quad x_3 \leq 4 \\ \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad 5p_1 + 6p_2 + 4p_3 \\ \text{s.a} \quad -p_1 + 2p_2 \leq 1 \\ \quad \quad 3p_1 - p_2 \geq 2 \\ \quad \quad \quad \quad 3p_2 + p_3 = 3 \\ \quad \quad p_1 \in \mathbb{R}, p_2 \geq 0, p_3 \leq 0 \end{array} \right.$$

*Vamos transformar o problema dual em um problema equivalente de*

minimização e calcular o seu dual:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad -5p_1 - 6p_2 - 4p_3 \\ \text{s.a} \quad -p_1 + 2p_2 \leq 1 \\ \quad \quad 3p_1 - p_2 \geq 2 \\ \quad \quad \quad 3p_2 + p_3 = 3 \\ \quad \quad p_1 \in \mathbb{R}, p_2 \geq 0, p_3 \leq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad z_1 + 2z_2 + 3z_3 \\ \text{s.a} \quad -z_1 + 3z_2 = -5 \\ \quad \quad 2z_1 - z_2 + 3z_3 \leq -6 \\ \quad \quad \quad \quad \quad z_3 \geq -4 \\ \quad \quad z_1 \leq 0, z_2 \geq 0, z_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Este último problema é equivalente ao problema original, com  $z = -x$ .

O princípio ilustrado pelo teorema acima (o dual do dual é o primal) vale em geral:

**Teorema 4.1** *Seja (P) um problema (primal) de programação linear e (D) o seu dual. O problema dual (D<sub>D</sub>) obtido a partir de (D) é equivalente a (P).*

**Exercício 4.3** *Prove o teorema acima para a formulação geral do exemplo 4.1.*

**Exemplo 4.2** *Considere o par primal-dual a seguir:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad c'x \\ \text{s.a} \quad Ax \geq b \\ \quad \quad x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad p'b \\ \text{s.a} \quad A'p = c \\ \quad \quad p \geq 0 \end{array} \right.$$

Substituindo as desigualdades do problema original por variáveis residuais e depois calculando o dual, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad c'x \\ \text{s.a} \quad Ax - x^r = b \\ \quad \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \quad \quad x^r \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad p'b \\ \text{s.a} \quad A'p = c \\ \quad \quad -p \leq 0 \\ \quad \quad p \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

Por outro lado, substituindo as variáveis do problema original por pares de variáveis não negativas e depois calculando o dual, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad c'x^+ - c'x^- \\ \text{s.a} \quad Ax^+ - Ax^- \geq b \\ \quad \quad x^+ \geq 0 \\ \quad \quad x^- \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad p'b \\ \text{s.a} \quad A'p \leq c \\ \quad \quad -A'p \leq -c \\ \quad \quad p \geq 0 \end{array} \right.$$

Observe que são equivalentes os três problemas primais, bem como os respectivos duais.

**Exemplo 4.3** *Considere o (PLC) e seu dual*

$$(PLC) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad c'x \\ \text{s.a} \quad Ax = b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right. \quad (DLC) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad b'p \\ \text{s.a} \quad A'p \leq c \\ \quad \quad p \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

e suponha que  $A_m = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i A_i$  e  $b_m = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i b_i$ , ou seja, que a última restrição de igualdade do (PLC) é supérflua. Note que

$$b'p = \left( \sum_{i=1}^{m-1} b_i p_i \right) + b_m p_m = \sum_{i=1}^{m-1} b_i p_i + \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i b_i p_m = \sum_{i=1}^{m-1} b_i (p_i + \gamma_i p_m),$$

$$A'p = \left( \sum_{i=1}^{m-1} (A_i)' p_i \right) + (A_m)' p_m = \sum_{i=1}^{m-1} (A_i)' (p_i + \gamma_i p_m).$$

Ou seja, o problema dual é equivalente a

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^{m-1} b_i q_i \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{m-1} (A_i)' q_i \leq c \\ & q \in \mathbb{R}^{m-1} \end{cases}$$

onde  $q_i = p_i + \gamma_i p_m$ . Este é exatamente o dual que seria obtido se eliminássemos a restrição supérflua do problema original.

Os três exemplos acima fornecem o seguinte resultado:

**Teorema 4.2** *Suponha que o problema de programação linear  $(P_2)$  foi obtido de  $(P_1)$  através de uma sequência de operações do tipo:*

1. substituição de uma variável  $x_i \in \mathbb{R}$  por  $x_i^+, x_i^- \geq 0$ ;
2. substituição de uma restrição  $A_i x \leq b$  por  $A_i x + x^r = b$ ,  $x^r \geq 0$ ;
3. eliminação de restrições de igualdade supérfluas.

Então os duais de  $(P_1)$  e  $(P_2)$  são equivalentes.

### 4.3 O teorema de dualidade

**Teorema 4.3 (Dualidade fraca)** *Se  $x$  é viável primal e  $p$  é viável dual, então*

$$p'b \leq c'x.$$

**Prova.**

Note que no caso canônico o resultado acima é trivial:

$$p'b = \overbrace{p'A}^{\leq c} \overbrace{x}^{\geq 0} \leq c'x.$$

No caso geral, considere os valores que aparecem nas funções Lagrangeano primal e dual:

$$\begin{aligned} u_i &= p_i (b_i - A_i x) \\ v_j &= (c_j - p'A^j) x_j. \end{aligned}$$

Pela viabilidade de  $x$  e  $p$ , o sinal de  $p_i$  tem que ser contrário ao de  $b_i - A_i x$ :

$$\begin{aligned} A_i x \geq b_i &\implies p_i \geq 0 \\ A_i x \leq b_i &\implies p_i \leq 0 \\ A_i x = b_i &\implies p_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Isso mostra que  $u_i \leq 0$ . Analogamente mostra-se que  $v_i \geq 0$ . Portanto

$$\begin{aligned} p'b - p'Ax &= \sum_{i=1}^m u_i \leq 0 \leq \sum_{j=1}^n v_j = c'x - p'Ax \\ &\Downarrow \\ p'b &\leq c'x. \end{aligned}$$

Apesar de bastante simples, o resultado acima já permite algumas conclusões sobre a relação entre os problemas primal e dual:

**Corolário 4.1** *Se o primal é ilimitado (valor ótimo  $-\infty$ ), o dual é inviável. Analogamente, se o dual é ilimitado (valor ótimo  $+\infty$ ), o primal é inviável.*

**Prova.**

Suponha que o primal é ilimitado, e suponha por contradição que  $p$  é viável dual. Pelo teorema fraco de dualidade,  $p'b \leq c'x$ ,  $\forall x$  viável. Pela ilimitação primal, existe um  $\bar{x}$  viável tal que  $c'\bar{x} < p'b$ , o que fornece a contradição  $p'b \leq c'\bar{x} < p'b$ . A outra implicação é análoga.

**Corolário 4.2** *Se  $x$  viável primal e  $p$  viável dual satisfazem  $p'b = c'x$ , então  $x$  e  $p$  são soluções ótimas de seus respectivos problemas.*

**Prova.**

Seja  $y$  uma solução viável primal qualquer. Pelo teorema fraco de dualidade,  $p'b \leq c'y$ ; assim  $c'x = p'b \leq c'y$ ,  $\forall y$  viável. A prova de que  $p$  é ótimo do problema dual é análoga.

**Teorema 4.4 (Dualidade forte)** *Se um problema de programação linear possui uma solução ótima então seu dual também possui solução ótima e os valores ótimos dos dois problemas são iguais.*

**Prova.**

A prova será dividida em dois casos: (PLC) e caso geral.

Considere o problema linear canônico

$$(PLC) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

e suponha que as linhas de  $A$  são linearmente independentes. Se o (PLC) possui solução ótima, o método simplex aplicado a este problema nos fornece uma base viável ótima  $B$ . Pelo critério de otimalidade,

$$\bar{c}' = c' - c'_B B^{-1} A = c' - p' A \geq 0,$$

onde  $p' = c'_B B^{-1}$  é o vetor de multiplicadores do simplex. Assim  $p$  é viável para o problema dual

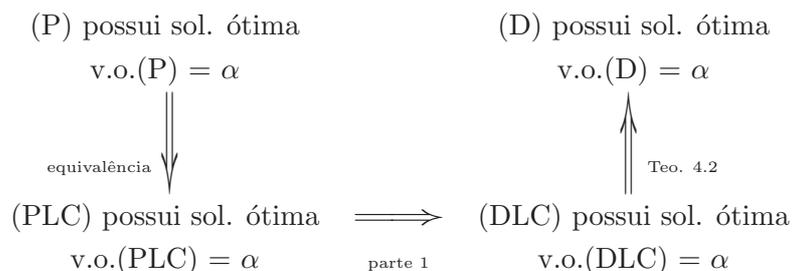
$$(DLC) \begin{cases} \max & p'b \\ \text{s.a} & A'p \leq c. \end{cases}$$

Além disto,

$$p'b = c'_B B^{-1} b = c'_B x_B = c'x,$$

onde  $x$  é a solução ótima associada à base  $B$ . Pelo corolário 4.2,  $p$  é uma solução ótima dual e o valor ótimo dual é igual ao valor ótimo primal.

Considere agora um problema de programação linear (P) qualquer e suponha que (P) possui uma solução ótima. Sabemos que podemos transformar este problema em um problema linear canônico (PLC) equivalente onde  $A$  possui linhas linearmente independentes, que possui uma solução ótima com o mesmo valor ótimo de (P).



Pela primeira parte desta demonstração, o dual do (PLC) possui solução ótima e o valor ótimo deste dual é igual ao valor ótimo do (PLC). Pelo teorema 4.2 os duais de (P) e do (PLC) são equivalentes, e portanto ambos possuem soluções ótimas e o mesmo valor ótimo.

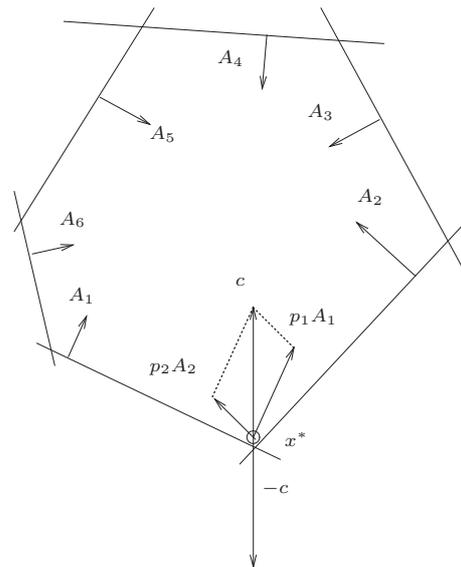
Lembramos que a solução de qualquer problema de programação linear pode levar a três conclusões possíveis: otimalidade, ilimitação e inviabilidade. Estas conclusões no caso de um problema qualquer de programação linear e seu dual podem ser expressas através de um diagrama:

Primal		Dual
Sol. Ótima	$\longleftrightarrow$	Sol. Ótima
Ilimitado	$\longleftrightarrow$	Ilimitado
Inviável	$\longleftrightarrow$	Inviável

Note que os casos que não estão associados no diagrama não são possíveis, de acordo com os teoremas de dualidade fraca e forte. A situação em que primal e dual são ambos inviáveis é possível, e pode ser ilustrada com este exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 = 1 \\ \quad \quad 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad p_1 + 3p_2 \\ \text{s.a} \quad p_1 + 2p_2 = 1 \\ \quad \quad p_1 + 2p_2 = 2 \end{array} \right.$$

**Exemplo 4.4** Considere um poliedro na forma  $Ax \geq b$  e suponha que coloquemos uma bola de dimensões desprezíveis em seu interior. Impulsionada pela gravidade, esta bola atingirá um estado de equilíbrio na quina mais baixa do poliedro.



Este ponto  $x^*$  é solução ótima do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad c'x \\ \text{s.a} \quad Ax \geq b, \end{array} \right.$$

onde  $c$  é um vetor vertical. O equilíbrio da bola naquele ponto é caracterizado pelo fato de que a gravidade (direção  $-c$ ) é contrabalançada pelas forças normais  $A_i$  exercidas pelas paredes do poliedro. Assim existirão coeficientes  $p_i \geq 0$  tais que

$$-c + \sum_i A_i' p_i = 0 \iff c = \sum_i A_i' p_i = A' p;$$

em particular,  $p$  é viável no problema dual

$$\begin{cases} \max & p'b \\ \text{s.a} & A'p = c \\ & p \geq 0. \end{cases}$$

Além disso, os coeficientes  $p_i$  associados às paredes que não encostam na bola são nulos, pois não há reação daquelas paredes. Isso mostra que

$$p_i(b_i - A_i x^*) = 0, \quad \forall i,$$

pois nas paredes que tocam a bola teremos  $b_i = A_i x^*$  e nas demais teremos  $p_i = 0$ . Consequentemente,

$$p'b = \sum_i p_i b_i = \sum_i p_i A_i x^* = \left( \sum_i p_i A_i \right) x^* = p' A x^* = c' x^*,$$

ou seja,  $p$  é viável dual e possui o mesmo valor da função objetivo dual que  $c' x^*$ . Assim  $p$  é ótimo dual e o valor ótimo dual é igual ao valor ótimo primal. Isso mostra que a solução ótima dual neste contexto pode ser vista como o vetor de pesos da combinação linear das restrições ativas que “equilibra” a solução em relação à minimização da função objetivo (vetor  $-c$ ).

### Folgas complementares

A condição  $p_i(b_i - A_i x) = 0, \forall i$ , no exemplo anterior é chamada de *folgas complementares*, pois diz que as restrições  $p_i \geq 0$  e  $A_i x \geq b_i$  não podem apresentar folgas (desigualdades estritas) simultaneamente. Outra condição de folgas complementares associadas ao mesmo par primal-dual é  $(c_j - p' A^j) x_j = 0, \forall j$ , que no exemplo anterior é satisfeita trivialmente (pois  $(A^j)' p = c_j, \forall j$ ). Quando  $x$  e  $p$  são viáveis (primal e dual, respectivamente), estas condições equivalem a  $c' x = p'b$ .

**Teorema 4.5 (Folgas complementares)** *Seja  $x$  uma solução viável primal e  $p$  uma solução viável dual. Então  $x$  e  $p$  são soluções ótimas (dos problemas primal e dual, respectivamente) se e somente se*

$$\begin{cases} p_i(b_i - A_i x) = 0, & \forall i, \\ (c_j - p' A^j) x_j = 0, & \forall j. \end{cases}$$

### Prova.

Na demonstração do teorema de dualidade fraca (4.3) verificamos que  $p_i(b_i - A_i x) \leq 0, \forall i$  e  $(c_j - p' A^j) x_j \geq 0, \forall j$ .

Assim,

$$p'b - p' A x = \sum_i p_i(b_i - A_i x) \leq 0 \leq \sum_j (c_j - p' A^j) x_j = c' x - p' A x.$$

Se, por um lado,  $x$  e  $p$  são soluções ótimas, temos  $c'x = p'b$  (teorema de dualidade forte) e assim todos os termos da desigualdade acima são iguais. Em particular,  $\sum_i p_i(b_i - A_i x) = 0$  e  $\sum_j (c_j - p'A^j)x_j = 0$ . Como os termos de cada uma destas somatórias têm todos o mesmo sinal ( $\leq 0$  na primeira,  $\geq 0$  na segunda), segue que  $p_i(b_i - A_i x) = 0, \forall i$ , e  $(c_j - p'A^j)x_j = 0, \forall j$ .

Por outro lado, se vale folgas complementares, então da desigualdade anterior segue que  $p'b - p'Ax = c'x - p'Ax$ , ou seja  $c'x = p'b$ . Pelo corolário 4.2 (do teorema de dualidade fraca) temos que  $x$  é solução ótima primal e  $p$  é solução ótima dual.

As condições de folgas complementares dizem que uma variável (primal ou dual) só pode ser diferente de 0 se a restrição correspondente (no dual ou no primal) estiver ativa ou, equivalentemente, que uma restrição (primal ou dual) só pode estar inativa se a variável correspondente (dual ou primal) possuir valor 0.

Quando um dos problemas (primal ou dual) possui restrições de igualdade, algumas das condições de folgas complementares são automaticamente satisfeitas; por exemplo quando o primal é o (PLC), as condições  $p_i(b_i - A_i x) = 0, \forall i$ , são satisfeitas para todos os pontos viáveis, pois  $A_i x = b_i$ . Um exemplo onde todas as folgas são possíveis e nenhuma das condições acima é automaticamente satisfeita é dado pelo par

$$(P) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \max & p'b \\ \text{s.a} & A'p \leq c \\ & p \geq 0 \end{cases}$$

**Exemplo 4.6** Considere o par de problemas

$$(P) \begin{cases} \min & 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a} & 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \max & 8p_1 + 3p_2 \\ \text{s.a} & 5p_1 + 3p_2 \leq 13 \\ & p_1 + p_2 \leq 10 \\ & 3p_1 \leq 6. \end{cases}$$

A solução  $x^* = (1, 0, 1)'$  é ótima, como verificaremos a seguir. É fácil ver que  $x^*$  é básica (associada à base  $\{x_1, x_3\}$ ), viável e não-degenerada (pois  $x_B^* > 0$ ). As condições  $p_i(b_i - A_i x^*) = 0, \forall i$ , são satisfeitas automaticamente, bem como  $(c_2 - p'A^2)x_2^* = 0$  (pois  $x_2^* = 0$ ). As demais condições de folgas complementares são  $(c_1 - p'A^1) \cdot 1 = 0$  e  $(c_3 - p'A^3) \cdot 1 = 0$ , o que fornece o sistema

$$\begin{cases} 5p_1 + 3p_2 = 13 \\ 3p_1 = 6 \end{cases}$$

que possui como única solução  $p_1^* = 2$  e  $p_2^* = 1$ . Note que esta solução é dual viável e que  $(p^*)'b = 19 = c'x^*$ , o que mostra que  $p^*$  é ótima no dual e confirma o fato de que  $x^*$  é ótimo no primal.

Este exemplo pode ser generalizado: em uma solução ótima não-degenerada temos  $x_{B_i}^* > 0$  para cada variável básica  $x_{B_i}$ . Assim, por folgas complementares, teremos  $p'A^j = c_j$  e portanto  $p' [A^{B_1} | \dots | A^{B_m}] = (c_{B_1}, \dots, c_{B_m})$  ou, equivalentemente,  $p'B = c'_B$ . Este sistema possui a solução única  $p' = c'_B B^{-1}$  que será viável no dual se e somente se a base  $B$  é ótima primal.

## Uma visão geométrica

Considere o par primal-dual

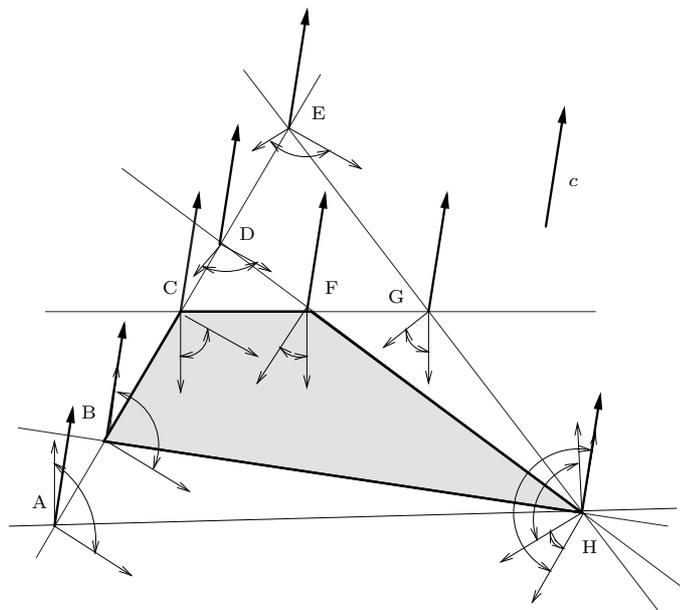
$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad c'x \\ \text{s.a} \quad A_i x \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad b'p \\ \text{s.a} \quad \sum_{i=1}^m p_i A_i = c' \\ p \geq 0. \end{array} \right.$$

Suponha que os vetores  $A_i$  geram  $\mathbb{R}^n$  (em particular,  $m \geq n$ ) e considere uma base de  $\mathbb{R}^n$  formada por  $A_i$ ,  $i \in I$ . O sistema  $A_I x = b_I$  possui uma única solução que vamos chamar de  $x^I$ .  $x^I$  é uma solução básica por construção; suponha além disso que  $x^I$  é não-degenerada, ou seja, que  $A_i x^I \neq b_i$ ,  $\forall i \notin I$ .

Seja  $p \in \mathbb{R}^m$  qualquer. Para que  $x^I$  seja ótimo primal e  $p$  seja ótimo dual, eles precisam satisfazer as seguintes condições:

- 1  $A_i x^I \geq b_i$ ,  $\forall i$ , (viabilidade primal)
- 2  $p_i = 0$ ,  $\forall i \notin I$  (folgas complementares)
- 3  $\sum_{i=1}^m p_i A_i = c'$  (viabilidade dual I)
- 4  $p \geq 0$  (viabilidade dual II)

Substituindo (2) em (3) temos  $\sum_{i \in I} p_i A_i = c'$ . Pela independência linear dos  $A_i$  este sistema possui uma única solução que chamaremos de  $p^I$ . Note que os vetores  $A_i$  correspondem a colunas L.I. do dual que está na forma canônica, assim estes vetores formam uma base do dual associada a  $p^I$ . Concluimos portanto que, construindo  $p^I$  desta maneira (satisfazendo folgas complementares), a viabilidade de  $p^I$  depende tão somente da restrição  $p^I \geq 0$ , ou seja, do fato de  $c$  ser uma combinação linear dos vetores  $A_i$  com coeficientes não-negativos.



Bases primais viáveis: B, C, F, H  
 Bases primais inviáveis: A, D, E, G  
 Bases associadas a algum dual viável: A, B, C, F, H  
 H é degenerado e está associado a algumas bases que correspondem a soluções duais inviáveis.

Se  $\bar{x}$  é uma solução básica degenerada então podem existir vários subconjuntos  $I$  distintos que correspondem a bases de  $\mathbb{R}^n$  formadas pelos vetores  $A_i$ . Para cada base teremos uma solução dual  $p^I$  diferente que satisfaz folgas complementares; se uma destas soluções for viável dual, e  $\bar{x}$  for viável primal, então o par  $(\bar{x}, p^I)$  será um par primal-dual ótimo (pelo teorema 4.5).

#### 4.4 Variáveis duais ótimas como custos marginais

Outra interpretação para as variáveis duais no ponto de ótimo, além da interpretação mecânica (equilíbrio), é a de associar as variáveis  $p_i$  a preços. Suponha que o problema primal é um problema linear canônico associado a um processo de produção e que o vetor  $b$  corresponde ao estoque de matérias-primas utilizadas (vide capítulo 1). Ao resolver-se o problema, uma pergunta que surge naturalmente é: *pode-se melhorar a solução ótima alterando-se o estoque?* Poderíamos vender parte do estoque de algumas matérias-primas menos essenciais e comprar outro tipo de matéria-prima.

Suponha que  $x^*$  é uma solução ótima não-degenerada e que  $B$  é a base ótima associada. Pela não-degenerescência,  $x_B = B^{-1}b > 0$ . Suponha que o estoque  $b$  seja trocado por  $b + d$ . Por continuidade,  $B^{-1}(b + d) > 0$  desde que  $d$  seja suficientemente pequeno. Assim a mesma base será viável para o problema alterado. Além disso,  $\bar{c}' = c' - c'_B B^{-1}A \geq 0$  independentemente do lado direito do problema ser  $b$  ou  $b + d$ . Assim, se  $B^{-1}(b + d) \geq 0$ , então esta base é ótima também no novo problema. O valor ótimo deste problema será

$$c'_B B^{-1}(b + d) = p'(b + d) = p'b + p'd = c'x^* + p'd,$$

ou seja, a variação do valor ótimo será  $p'd$ . Cada variável  $p_i$  representa o quanto se ganha ou perde no valor ótimo para uma variação  $d_i$  no lado direito do problema. Se for possível modificar o problema através de uma variação  $d$  do estoque que satisfaça  $p'd < 0$ , o valor ótimo do problema modificado será menor do que o do problema original.

Se modificarmos o lado direito do problema original de tal modo que a base ótima deixa de ser viável ( $B^{-1}(b + d) \not\geq 0$ ), podemos ainda aproveitar a informação de  $p$  ser viável dual para aplicarmos o simplex dual usando  $B$  como base inicial.

## 4.5 O Simplex Dual

Na prova do teorema forte de dualidade utilizamos o fato de que se um problema na forma canônica possui solução ótima então o simplex aplicado a ele consegue encontrar uma base viável ótima. Vimos que a condição de otimalidade  $\bar{c}' = c' - c'_B B^{-1} A \geq 0$  era equivalente à condição de viabilidade dual  $A'p \leq c$  para o vetor de multiplicadores do simplex  $p' = c'_B B^{-1}$ . Observe que este vetor está definido para todas as bases do problema (sejam elas viáveis ou inviáveis), e que

$$p'b = c'_B B^{-1} b = c'_B x_B = c'x.$$

Podemos então pensar no simplex como um método que percorre bases do problema primal associadas ao par  $(x, p)$ , mantendo a condição de viabilidade primal ( $x_B = B^{-1}b \geq 0$ ) e folgas complementares (que correspondem a  $p'b = c'x$  neste caso), buscando atingir viabilidade dual ( $c' - p'A \geq 0$ ).

Uma alternativa é explorar as bases do poliedro na forma canônica mantendo a cada iteração as condições de viabilidade *dual* e folgas complementares, buscando obter viabilidade primal. Um tal método passaria por uma sequência de soluções *inviáveis* do primal, e obteria otimalidade (de  $x$  e  $p$ ) quando verificasse a condição de viabilidade primal.

Considere o tableau associado a uma base  $B$

$-c'_B x_B$	$\bar{c}_1$	$\dots$	$\bar{c}_n$
$x_{B_1}$			
$\vdots$	$B^{-1}A^1$	$\dots$	$B^{-1}A^n$
$x_{B_m}$			

e suponha que  $\bar{c} \geq 0$  (ou equivalentemente  $A'p \leq c$ ) mas não temos necessariamente que  $x_B \geq 0$  (se esta última condição fosse verdadeira a base seria ótima, como vimos anteriormente). Considere um índice  $l$  tal que  $x_{B_l} < 0$  e considere a  $l$ -ésima linha do tableau,  $v = B_l^{-1}A$ , que

definiremos como a linha pivô. A coluna pivô será qualquer coluna  $j$  que satisfaça  $v_j < 0$  e

$$\frac{\bar{c}_j}{|v_j|} = \min_{v_i < 0} \frac{\bar{c}_i}{|v_i|}.$$

Observe que  $x_j$  é não-básico (pois a coluna  $j$  do tableau não é uma coluna da identidade!) e podemos forçar a entrada de  $x_j$  na base substituindo  $x_{B_i}$  fazendo uma pivotação sobre o elemento  $v_j$ . Observe também que o novo valor de  $\bar{c}'$  será  $\bar{c}' + \frac{\bar{c}_j}{|v_j|}v \geq 0$  (devido à escolha de  $j$ ) e que o novo valor de  $-c'_B x_B$  será  $-c'_B x_B + \frac{\bar{c}_j}{|v_j|}x_{B_i} \leq -c'_B x_B$ . Isso mostra que a nova base é viável dual e que o valor da solução dual não decresce.

**Exemplo 4.7** Considere o tableau abaixo.

			↓			
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
	0	2	6	10	0	0
$x_4 =$	2	-2	4	1	1	0
← $x_5 =$	-1	4	-2	-3	0	1

Como  $x_{B_2} < 0$  escolhemos esta linha como linha pivô. Os elementos  $v_j < 0$  desta linha são  $v_2 = -2$  e  $v_3 = -3$ ; como  $\frac{6}{|-2|} < \frac{10}{|-3|}$  escolhemos  $j = 2$ . Pivotando sobre o elemento  $v_2$  temos o novo tableau

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
	-3	14	0	1	0	3
$x_4 =$	0	6	0	-5	1	2
$x_2 =$	$\frac{1}{2}$	-2	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Observe que o custo aumentou para 3 e que  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ , o que juntamente com  $\bar{c} \geq 0$  mostra que a solução  $x = (0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)'$  é ótima.

Duas observações merecem ser feitas antes de enunciarmos o método simplex dual.

A primeira é que sempre que  $\bar{c}_j > 0$  na coluna pivô teremos que o novo valor de  $-c'_B x_B$  será  $-c'_B x_B + \frac{\bar{c}_j}{|v_j|}x_{B_i} < -c'_B x_B$  e portanto o custo da solução dual cresce estritamente. Se isto for verdade em todas as iterações, o número de iterações será finito (pois o número de bases é finito). Se numa iteração  $\bar{c}_j = 0$  na coluna pivô então a solução dual não muda e a pivotação é dual-degenerada; será necessário utilizar alguma regra anti-ciclagem (como Bland, por exemplo) para garantir a terminação do simplex dual em um número finito de iterações.

A segunda observação é que se  $x_{B_i} < 0$  e a linha correspondente do tableau  $v = B_i^{-1}A$  é não-negativa, então o problema dual é ilimitado (exercício 4.22), e conseqüentemente o primal é inviável.

## Uma iteração do simplex dual

0. A iteração começa com o tableau associado a uma base  $B$  tal que  $\bar{c} \geq 0$ ;
1. Se  $x_B \geq 0$  pare, a solução é ótima; do contrário, escolha um índice  $l$  tal que  $x_{B_l} < 0$ ;
2. Se  $v = B_l^{-1}A \geq 0$  pare, o primal é inviável; do contrário, escolha um índice  $j$  tal que  $\frac{\bar{c}_j}{|v_j|} = \min_{v_i < 0} \frac{\bar{c}_i}{|v_i|}$ ;
3. Faça a pivotação sobre o elemento  $v_j$ , que corresponde a fazer  $x_{B_l}$  sair da base e  $x_j$  entrar em seu lugar.

## Quando usar o simplex dual

Um caso particular onde é interessante utilizar o simplex dual é quando o problema original é da forma  $\min c'x$  s.a  $Ax \leq b, x \geq 0$ , onde  $c \geq 0$ . Passando este problema para a forma canônica temos que a base formada pelas variáveis residuais, embora não necessariamente viável primal, é viável dual pois

$$\bar{c}' = c' - \overset{=0}{c'_B} B^{-1}A = c' \geq 0.$$

Assim podemos formar o tableau associado a esta base e aplicar o método simplex dual. Observe que neste caso a solução viável dual inicial é  $p' = c'_B B^{-1} = 0'I = 0$ , com valor da função objetivo 0.

Outra situação ainda mais relevante é quando conhecemos uma solução ótima para um (PLC) e queremos resolver o mesmo problema com um lado direito  $b$  diferente. A mudança do vetor  $b$  pode prejudicar a viabilidade primal da base ótima conhecida, mas não afeta o vetor de custos reduzidos (pois este não depende de  $b$ ) e assim a base conhecida é viável dual, o que permite a utilização do simplex dual. Voltaremos a este exemplo no capítulo 5.

## A geometria do simplex dual

Observe que a solução dual construída a partir de uma base primal ( $p' = c'_B B^{-1}$ ) satisfaz  $p'B = p' [A^{B_1} | \dots | A^{B_m}] = c'_B$ , ou equivalentemente

$$(A^{B_i})'p = c_{B_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

o que corresponde a  $m$  restrições do problema dual, ativas em  $p$ , e linearmente independentes (pois as colunas da base são linearmente independentes). Como as variáveis duais estão em  $\mathbb{R}^m$ , temos que  $p' = c'_B B^{-1}$  é na realidade uma solução básica do dual. Assim, uma base do

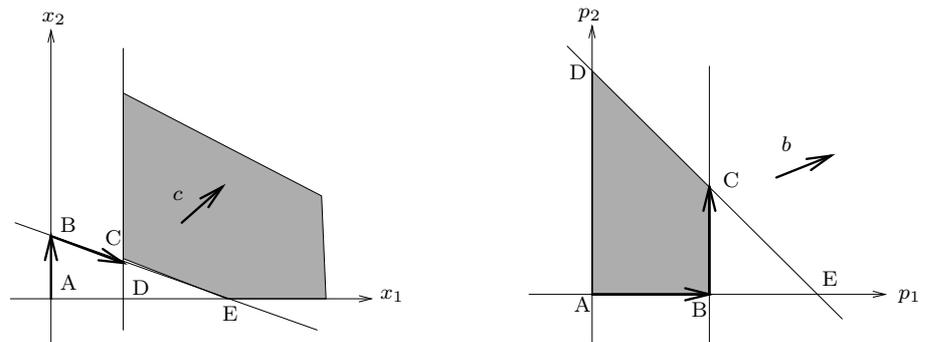
(PLC) está associada tanto a uma solução básica primal quanto a uma solução básica dual. Estas soluções (primal e dual) podem ser viáveis ou inviáveis; a base em questão será ótima se e somente se as duas soluções forem viáveis (primal e dual respectivamente).

Mais ainda, ao passar de uma base para a outra o simplex (dual) preserva  $m - 1$  colunas l.i. que são comuns às duas bases, o que corresponde no dual, de acordo com o argumento anterior, a  $m - 1$  restrições ativas linearmente independentes em comum entre as duas soluções básicas duais correspondentes. Assim o simplex dual percorre um caminho de soluções básicas viáveis que são adjacentes no poliedro associado ao problema dual, até atingir otimalidade dual (que corresponde à viabilidade primal da solução  $x$  associada). No entanto, aplicar o simplex dual não corresponde necessariamente a aplicar o simplex primal ao problema dual passado para a forma canônica (um exemplo pode ser encontrado no exercício 4.25 do livro).

**Exemplo 4.8** Considere o par de problemas primal-dual

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 - x_4 = 1 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 2p_1 + p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + p_2 \leq 1 \\ & 2p_1 \leq 1 \\ & p \geq 0 \end{array}$$

Os conjuntos viáveis dos dois problemas são ilustrados a seguir (no primal as variáveis  $x_3$  e  $x_4$  são interpretadas como variáveis de folga).



Há um total de 5 bases no primeiro problema, associadas a 5 soluções básicas distintas, identificadas na figura como A, B, C, D e E. As soluções básicas correspondentes no dual foram identificadas com as mesmas letras. Como exemplo, a base formada pelas colunas  $A^3$  e  $A^4$  determinam a solução básica primal  $x = (0, 0, -2, -1)'$  (ponto A). A solução dual correspondente é obtida fazendo-se  $p'A^3 = c_3$  e  $p'A^4 = c_4$ , cuja solução é  $p = (0, 0)'$ . Esta é uma solução básica viável no dual, e pode ser utilizada para inicializar o simplex dual:

			↓		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
	0	1	1	0	0
← $x_3 =$	-2	-1	-2	1	0
$x_4 =$	-1	-1	0	0	1

Aplicando o simplex dual, teremos

			↓		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
$x_2 =$	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
← $x_4 =$	-1	-1	0	0	1

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_2 =$	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_1 =$	1	1	0	0	-1

Esta sequência de tableaus corresponde ao caminho A-B-C tanto no problema primal quanto no dual. No primal o caminho percorre uma sequência de bases inviáveis até encontrar uma base viável que também é ótima. No dual, o caminho tem as mesmas propriedades do simplex primal: as bases são todas viáveis e a função objetivo (dual) melhora (aumenta) a cada passo.

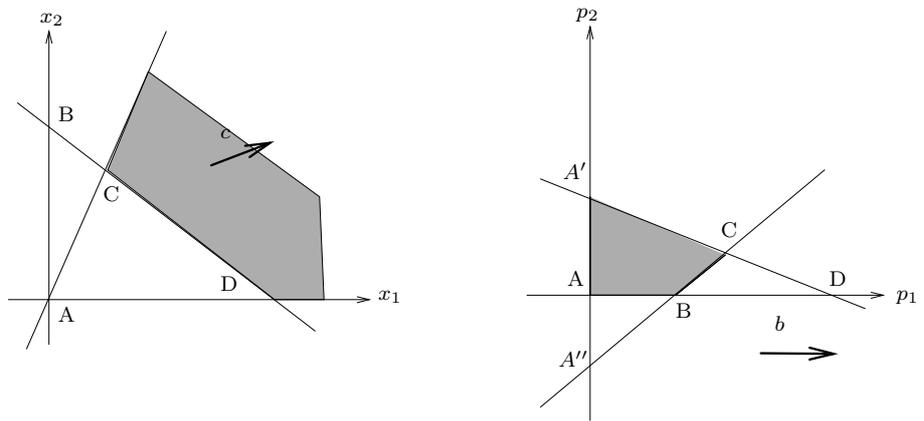
### Dualidade e degenerescência

Dada uma base  $B$  do (PLC), considere a solução básica dual  $p' = c'_B B^{-1}$  associada. Se esta solução é degenerada, então além das restrições  $p' A^{B_i} = c_{B_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  teremos alguma outra restrição  $p' A^j = c_j$  ativa, correspondente a uma variável  $x_j$  primal não-básica; consequentemente teremos  $\bar{c}_j = c_j - p' A^j = 0$ . Isso mostra que degenerescência da solução dual associada à base  $B$  corresponde a termos algum custo reduzido nulo associado a uma variável não-básica. Lembre-se no entanto que bases, custos reduzidos e direções básicas só estão definidos para o (PLC).

**Exemplo 4.9** Considere o par primal-dual

$$\begin{array}{ll}
 \min & 3x_1 + x_2 \\
 \text{s.a.} & x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & 2x_1 - x_2 \geq 0 \\
 & x \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \max & 2p_1 \\
 \text{s.a.} & p_1 + 2p_2 \leq 3 \\
 & p_1 - p_2 \leq 1 \\
 & p \geq 0
 \end{array}$$

Os conjuntos viáveis dos dois problemas são ilustrados a seguir



Observe que há um total de seis bases na formulação canônica do problema primal, mas apenas quatro soluções básicas (pontos A, B, C e D). Na formulação canônica do dual as seis bases correspondem a seis soluções básicas distintas (pontos A, A', A'', B, C e D).

Lembrando que o dual do dual é o primal, poderíamos pensar por um instante no problema da direita como primal. A solução básica associada ao ponto A (da figura da direita) tem como solução dual básica associada o ponto  $(0,0)'$  na figura da esquerda. A degenerescência desta última solução mostra que existem soluções vizinhas de A (na figura da direita) com o mesmo valor da função objetivo; estas são as soluções básicas A' e A''. Escrevendo a formulação canônica do problema da direita veríamos que as soluções A, A' e A'' estão associadas respectivamente às bases  $\{p_3, p_4\}$ ,  $\{p_2, p_4\}$  e  $\{p_2, p_3\}$ , que são vizinhas, e a direção básica a partir de A em direção a A', associada à entrada de  $p_2$  na base, possui custo reduzido nulo.

## 4.6 Sistemas Lineares e o Lema de Farkas

Vimos na seção anterior que resolver um problema de programação linear não é mais difícil do que resolver sistemas de equações e desigualdades lineares em geral. Veremos agora alguns resultados provenientes da teoria de dualidade em programação linear para decidir se um dado sistema linear possui ou não solução.

**Teorema 4.6 (Lema de Farkas)** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Então exatamente uma das afirmativas seguintes é verdadeira:*

1. Existe  $x \geq 0$  tal que  $Ax = b$ ;
2. Existe  $p$  tal que  $A'p \geq 0$  e  $p'b < 0$ .

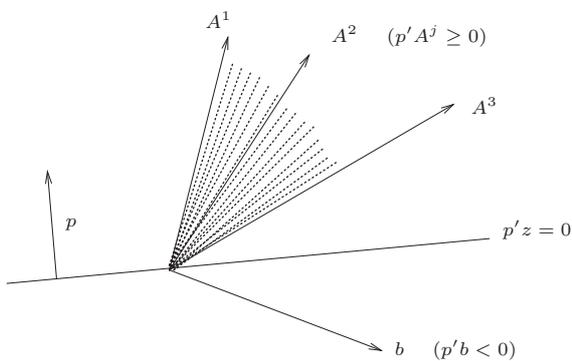
**Prova.**

Suponha que vale (1). Então (2) não pode ser verdadeira, pois  $A'p \geq 0 \implies p'b = p'Ax = (A'p)'x \geq 0$ .

Por outro lado, suponha que não vale (1). Considere o par primal-dual

$$\begin{cases} \min & p'b \\ \text{s.a} & A'p \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \max & 0'x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

Observe que o primal é viável (pois  $A'0 \geq 0$ ) e que o dual é inviável por hipótese. A única possibilidade para o primal é ser ilimitado (pois o primal é viável, e se possuísse solução ótima o dual também possuiria, pelo teorema de dualidade forte). Logo o valor ótimo do primal é  $-\infty$  e, em particular, existe uma solução  $p$  viável ( $A'p \geq 0$ ) que satisfaz  $p'b < 0$ .



Se  $b$  não pode ser escrito como combinação linear dos vetores  $A^j$  com coeficientes não-negativos, existe um hiperplano  $p'z = 0$  que separa  $b$  dos vetores  $A^j$ .

Observe que este lema permite transformar uma proposição do tipo  $\forall x : \dots \equiv \forall x : \neg \dots$  (universal, em princípio mais difícil) em uma proposição do tipo  $\exists p : \dots$  (existencial, em princípio mais fácil).

**Corolário 4.3** *Sejam  $A^1, \dots, A^n, b \in \mathbb{R}^m$  e suponha que qualquer vetor  $p$  que satisfaz  $p'A^j \geq 0, \forall j$  também satisfaz  $p'b \geq 0$ . Então  $b$  pode ser escrito como combinação linear de  $A^1, \dots, A^n$  com coeficientes não-negativos.*

## 4.7 De Hiperplanos Separadores a Dualidade

Lembremos que nosso desenvolvimento de dualidade, em particular do teorema forte de dualidade, esteve baseado no fato de que o simplex, munido de uma regra anti-ciclagem para escolha do pivô, termina em um número finito de passos para qualquer problema de programação linear na forma canônica. O método simplex foi utilizado na demonstração daquele teorema para construir uma solução ótima dual com o mesmo valor da solução ótima primal (cuja existência era hipótese do teorema forte). Usando o teorema forte de dualidade pudemos demonstrar o lema de Farkas, que pode ser interpretado em termos da existência de um hiperplano que separa o vetor  $b$  das colunas de  $A$ .

Nesta seção vamos mostrar que é possível chegar ao teorema forte de dualidade por um caminho puramente geométrico, independente do método simplex. Esta derivação começa a partir de um resultado de hiperplanos separadores para conjuntos convexos, estabelece o lema de Farkas a partir deste resultado e finalmente demonstraremos o teorema forte de dualidade a partir do lema de Farkas. Esta linha de argumentação pode ser generalizada para problemas não-lineares.

Alguns conceitos e resultados básicos serão apresentados a seguir.

**Definição** Um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é **fechado** se para qualquer sequência  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset S$  convergente temos que  $(\lim_{k \rightarrow \infty} x^k) \in S$ .

**Teorema 4.9** *Todo poliedro é fechado.*

**Prova.**

Todo poliedro pode ser representado na forma geral  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ . Suponha que  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset P$  é uma sequência tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$ . Como  $x^k \in P$  temos  $Ax^k \geq b, \forall k \in \mathbb{N}$ . Como  $f(x) = Ax$  é uma função contínua, temos que

$$Ax^* = A \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x^k \right) = \left( \lim_{k \rightarrow \infty} Ax^k \right) \geq b,$$

onde a última desigualdade é consequência do fato que a componente  $i$  do vetor  $(\lim_{k \rightarrow \infty} Ax^k)$  é igual a  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_i x^k$  onde  $A_i x^k \geq b_i, \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 4.10 (Teorema de Weierstrass)** *Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e  $S \subset \mathbb{R}^n$  é não-vazio, fechado e limitado, então  $f$  admite máximo e mínimo em  $S$ , ou seja, existem  $\bar{x}, \hat{x} \in S$  tais que*

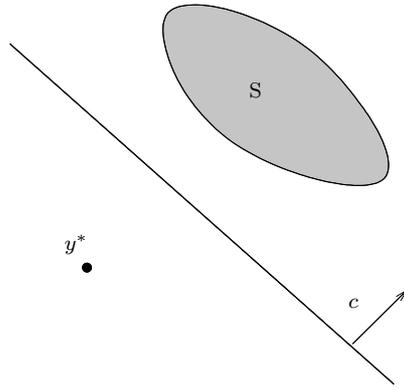
$$f(\hat{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x}), \forall x \in S.$$

**Prova.**

A prova deste resultado foge ao escopo deste curso, mas pode ser encontrada no livro *Real Analysis* de W. Rudin.

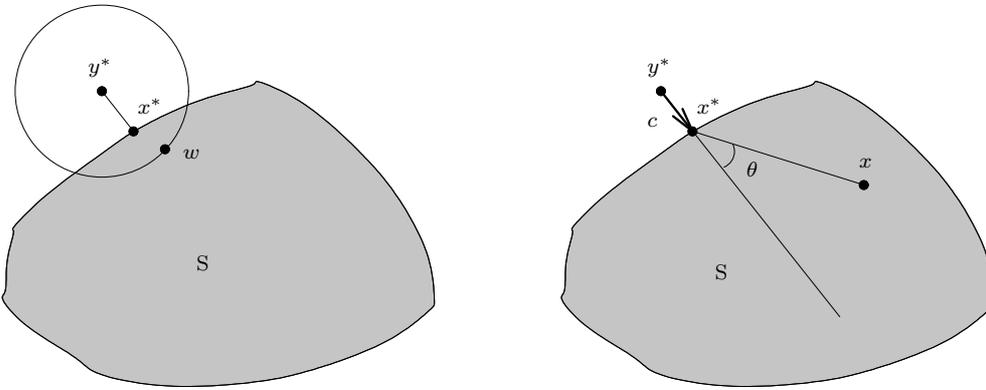
Observe que o teorema de Weierstrass depende fundamentalmente do fato de  $S$  ser fechado e limitado:  $f(x) = x$  não admite nem mínimo nem máximo em  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

**Teorema 4.11 (Teorema do Hiperplano Separador)** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  convexo, fechado e não-vazio, e seja  $y^* \in \mathbb{R}^n$  tal que  $y^* \notin S$ . Então existe um vetor  $c \in \mathbb{R}^n$  tal que  $c'y^* < c'x, \forall x \in S$ .*



**Prova.**

Como  $S \neq \emptyset$ , considere um  $w \in S$  qualquer. Seja  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y^*\| \leq \|w - y^*\|\}$  e  $D = S \cap B$ .



Observe que  $D$  é não-vazio ( $w \in D$ ), fechado, limitado e convexo (pois  $S$  e  $B$  são fechados e convexos), e que  $f(x) = \|x - y^*\|$  é uma função contínua. Pelo teorema de Weierstrass existe um  $x^* \in D$  tal que  $\|x^* - y^*\| \leq \|x - y^*\|, \forall x \in D$ . Para  $x \in S \setminus D$  temos  $\|x - y^*\| > \|w - y^*\| \geq \|x^* - y^*\|$ , o que mostra que

$$\|x^* - y^*\| \leq \|x - y^*\|, \forall x \in S.$$

Seja  $x \in S$ . Como  $S$  é convexo, para qualquer  $\lambda \in (0, 1)$  temos que  $x^* + \lambda(x - x^*) = \lambda x + (1 - \lambda)x^* \in S$ . Usando a desigualdade anterior, temos

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\|^2 &\leq \|x^* + \lambda(x - x^*) - y^*\|^2 \\ &= \|x^* - y^*\|^2 + 2\lambda(x^* - y^*)'(x - x^*) + \lambda^2\|x - x^*\|^2, \end{aligned}$$

e assim  $(x^* - y^*)'(x - x^*) \geq -\frac{\lambda}{2}\|x - x^*\|$ . Tomando o limite para  $\lambda \rightarrow 0$  temos

$$(x^* - y^*)'(x - x^*) \geq 0.$$

Isso mostra que o ângulo  $\theta$  representado na figura anterior é agudo. Logo

$$\begin{aligned}(x^* - y^*)'x &\geq (x^* - y^*)'x^* \\ &= (x^* - y^*)'y^* + (x^* - y^*)'(x^* - y^*) \\ &> (x^* - y^*)'y^*.\end{aligned}$$

Fazendo-se  $c = x^* - y^*$  temos o resultado.

### Lema de Farkas como consequência do Teorema do Hiperplano Separador

Lembremos do enunciado do Lema de Farkas: *Seja  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Então exatamente uma das afirmativas seguintes é verdadeira:*

1. *Existe  $x \geq 0$  tal que  $Ax = b$ ;*
2. *Existe  $p$  tal que  $A'p \geq 0$  e  $p'b < 0$ .*

A primeira parte da demonstração é idêntica à da primeira prova: Supondo que vale (1), então  $A'p \geq 0 \implies p'b = p'Ax = (A'p)'x \geq 0$ , o que mostra que (2) não pode ser verdadeira.

Por outro lado, suponha que não vale (1). Considere o cone gerado pelas colunas de  $A$

$$S = \{Ax \mid x \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \geq 0 : Ax = y\}.$$

Como (1) é falso,  $b \notin S$ . Observe que  $S$  é não-vazio (pois  $0 \in S$ ), fechado ( $S$  é um poliedro, tente provar) e convexo ( $x^1, x^2 \geq 0 \implies \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \geq 0$ ). Portanto  $Ax^1, Ax^2 \in S \implies \lambda Ax^1 + (1-\lambda)Ax^2 = A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \in S$ ). Pelo teorema do hiperplano separador, existe um  $p \in \mathbb{R}^m$  tal que  $p'b < p'y, \forall y \in S$ . Como  $0 \in S, p'b < 0$ . Como  $\lambda A^i \in S, \forall \lambda > 0$  (pois  $\lambda A^i = A(\lambda e^i)$ ) temos  $p'b < \lambda p'A^i$  e consequentemente  $p'A^i > \frac{p'b}{\lambda}$ . Fazendo  $\lambda \rightarrow +\infty$  temos  $p'A^i \geq 0$ . Como isso vale para  $i = 1, \dots, m$  temos  $A'p \geq 0$ , completando a prova.

### O Teorema Forte de Dualidade como consequência do Lema de Farkas

Considere o par primal-dual

$$\begin{array}{ll}\min & c'x \\ \text{s.a.} & Ax \geq b\end{array} \qquad \begin{array}{ll}\max & p'b \\ \text{s.a.} & A'p = c \\ & p \geq 0.\end{array}$$

Vamos provar que se o primal possui uma solução ótima  $x^*$  então o dual possui uma solução ótima com o mesmo valor da função objetivo. A

extensão para qualquer problema de programação linear segue a mesma linha da prova original deste teorema.

Considere  $I = \{i \mid A_i x^* = b_i\}$  o conjunto das restrições ativas em  $x^*$ . Observe que o conjunto das direções viáveis a partir de  $x^*$  é

$$\begin{aligned} D &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 : A(x^* + \varepsilon d) \geq b\} \\ &= \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 : \begin{cases} \varepsilon A_i d \geq b_i - A_i x^* = 0, & i \in I \\ \varepsilon A_i d \geq b_i - A_i x^* < 0, & i \notin I \end{cases} \right\} \\ &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid A_i d \geq 0, i \in I\}. \end{aligned}$$

Como  $x^*$  é ótimo, temos  $c'd \geq 0, \forall d \in D$  ou, analogamente, não existe  $d$  tal que  $A_i d \geq 0, i \in I$  e  $c'd < 0$ . Usando o lema de Farkas, temos que  $c'$  pode ser escrito como combinação linear dos  $A_i, i \in I$  com coeficientes não-negativos. Equivalentemente, existem  $p_i \geq 0$  tais que  $\sum_{i \in I} p_i A_i = c'$ . Fazendo  $p_i = 0, i \notin I$  teremos  $p \in \mathbb{R}^m, p \geq 0$  e  $p'A = c'$  ( $A'p = c$ ), o que mostra que  $p$  é viável no problema dual. Além disso,

$$p'b = \sum_{i \in I} p_i b_i = \sum_{i \in I} p_i A_i x^* = \left( \sum_{i \in I} p_i A_i \right) x^* = c'x^*,$$

o que, juntamente com o teorema fraco de dualidade, mostra que  $p$  é ótimo dual e o valor ótimo dual é igual ao valor ótimo primal.

**Exercícios sugeridos para o capítulo 4: 4.1-4.5, 4.8, 4.10-4.16, 4.18, 4.22, 4.25-4.27, 4.31, 4.35, 4.43(a).**