Notas de aula sobre Análise de Fourier

Marcelo Queiroz

(Parcialmente baseadas no livro

Introduction to Fourier Analysis

de Norman Morrison)

1 Série de Fourier para funções periódicas

Objetivo: Representação de funções periódicas como combinação linear de funções senoidais: $\text{sen}(x)$, $\cos(3x)$, $\text{sen}(5x+8)$...

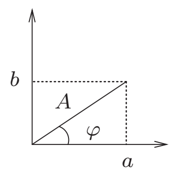
1.1 Revisão de Cálculo

Observe que

$$\begin{aligned} A\,\text{sen}(\omega t+\varphi) &= A\cos\varphi\,\text{sen}(\omega t) + A\,\text{sen}\,\varphi\cos(\omega t) \\ &= a\,\text{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} a = A\cos\varphi \\ b = A\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \iff \begin{cases} A = \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a} \end{cases}$$



Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com período T. Vamos tentar encontrar $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\text{sen}(\omega_i t) + b_i\cos(\omega_i t)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (frequência angular) e $\omega_i = i\omega$.

Lema (Relações de Ortogonalidade)

$$\begin{aligned} \text{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) &\equiv \int_0^T \text{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i,j \\ \cos(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) &\equiv \int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i \neq j, \\ \text{sen}(\omega_i t) \perp \text{sen}(\omega_j t) &\equiv \int_0^T \text{sen}(\omega_i t)\,\text{sen}(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i \neq j, \end{aligned}$$

Além disso

$$\|\cos(\omega_i t)\|^2 = \int_0^T \cos^2(\omega_i t)\,dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall i \neq 0 \\ T & i = 0 \end{cases} \qquad \|\text{sen}(\omega_i t)\|^2 = \int_0^T \text{sen}^2(\omega_i t)\,dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall i \neq 0 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

Prova

Considerando a primeira integral, se $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i+\omega_j)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i-\omega_j)t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i+\omega_j)t)}{\omega_i+\omega_j}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i-\omega_j)t)}{\omega_i-\omega_j}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i+j)\omega t)}{(i+j)\omega}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i-j)\omega t)}{(i-j)\omega}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\frac{[-\cos((i+j)2\pi)+\cos(0)]}{(i+j)\omega} + \frac{1}{2}\frac{[-\cos((i-j)2\pi)+\cos(0)]}{(i-j)\omega} \\
&= \frac{1}{2}\frac{[-1+1]}{(i+j)\omega} + \frac{1}{2}\frac{[-1+1]}{(i-j)\omega} = 0.
\end{aligned}$$

Quando $i = j$ tem-se $\frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i-\omega_j)t)\,dt = \int_0^T 0\,dt = 0$ na segunda metade da expressão acima (a primeira metade permanece igual a zero pelas mesmas contas). Em relação ao produto de cossenos temos, para $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \cos((\omega_i+\omega_j)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos((\omega_i-\omega_j)t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}((i+j)\omega t)}{(i+j)\omega}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}((i-j)\omega t)}{(i-j)\omega}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\frac{[\operatorname{sen}((i+j)2\pi)-\operatorname{sen}(0)]}{(i+j)\omega} + \frac{1}{2}\frac{[\operatorname{sen}((i-j)2\pi)-\operatorname{sen}(0)]}{(i-j)\omega} \\
&= \frac{1}{2}\frac{[0-0]}{(i+j)\omega} + \frac{1}{2}\frac{[0-0]}{(i-j)\omega} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_i t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega_i t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(0t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T 1\,dt = \frac{T}{2}. \\
\int_0^T \cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\,dt &= \int_0^T \cos(0t)\cos(0t)\,dt = \int_0^T 1\,dt = T
\end{aligned}$$

Os resultados para $\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\operatorname{sen}(\omega_i t)\,dt$ são análogos. ■

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de a_i e b_i na expressão $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \operatorname{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$. Multiplicando por $\operatorname{sen}(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre

0 e T obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \,\mathrm{sen}(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt\right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt\right) \\
&= a_j \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

de onde

$$a_j = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt,\ \forall j \neq 0.$$

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \,\mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt\right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt\right) \\
&= b_j \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$b_j = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt,\ \forall j \neq 0.$$

O valor de b_0 pode ser obtido de modo análogo, lembrando que a última integral possui valor T quando $j = 0$, e assim

$$b_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

O valor a_0 na realidade é irrelevante para a decomposição pois aparece multiplicado por $\mathrm{sen}(\omega_i t) = \mathrm{sen}(0t) = 0$, e pode ser definido arbitrariamente como $a_0 = 0$.

As equações que definem os coeficiente a_j e b_j são denominadas *equações de análise*, pois permitem decompor (analisar) a função original como soma de funções mais simples, através da *equação de síntese* $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \,\mathrm{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$. Cada uma destas funções mais simples é chamada de (i-ésimo) *harmônico* da função $f(t)$ original, possuindo a forma de uma senóide

$$h_i(t) = a_i \,\mathrm{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t) = A_i \,\mathrm{sen}(\omega_i t + \varphi_i)$$

onde $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ e $\varphi_i = \tan^{-1} \frac{b_i}{a_i}$.

1.2 Expoentes Complexos

Podemos representar várias funções que nos interessam aqui através da série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Quando tal representação existe, podemos obter os coeficientes a_n calculando a função original e suas derivadas no ponto $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
&f(0) = a_0 \\
&f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Longrightarrow f'(0) = a_1 \\
&f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \Longrightarrow f''(0) = 2a_2 \Longrightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2} \\
&\vdots \\
&f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1) a_n x^{n-m} \Longrightarrow f^{(m)}(0) = m! a_m \Longrightarrow a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}.
\end{aligned}
$$

Assim, temos as representações

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(0) + \cos(0)x - \tfrac{\operatorname{sen}(0)}{2}x^2 - \tfrac{\cos(0)}{3!}x^3 + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos(x) &= \cos(0) - \operatorname{sen}(0)x - \tfrac{\cos(0)}{2}x^2 + \tfrac{\operatorname{sen}(0)}{3!}x^3 + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
e^x &= e^0 + e^0 x + \tfrac{e^0}{2}x^2 + \tfrac{e^0}{3!}x^3 + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária) temos

$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \omega^n}{n!}$$

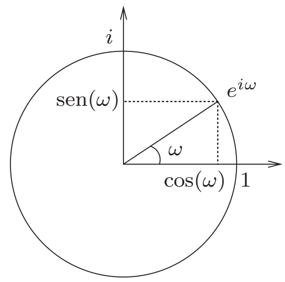
Observe que para n par temos $i^0, i^2, i^4, i^6, \ldots = 1, -1, 1, -1, \ldots$ e para n ímpar temos $i^1, i^3, i^5, i^7, \ldots = i, -i, i, -i, \ldots$. Assim obtemos a chamada *Relação de Euler*:

$$
\begin{aligned}
e^{i\omega} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(\omega) + i \operatorname{sen}(\omega).
\end{aligned}
$$

O número complexo $e^{i\omega}$ possui como representação Cartesiana a expressão $\cos(\omega)+i\,\text{sen}(\omega)$. Em coordenadas polares representamos o mesmo número através de seu módulo e do ângulo ou fase em relação ao eixo real:

$$|e^{i\omega}| = \sqrt{\cos^2(\omega)+\text{sen}^2(\omega)} = 1$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\text{sen}(\omega)}{\cos(\omega)}\right) = \tan^{-1}\tan(\omega) = \omega$$



A partir da relação de Euler podemos obter outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos:

$$e^{-i\omega} = e^{i(-\omega)} = \cos(-\omega)+i\,\text{sen}(-\omega) = \cos(\omega)-i\,\text{sen}(\omega)$$

ou ainda, $e^{-i\omega} = (e^{i\omega})^*$ ($*$ denota a operação de conjugação, definida por $(a+ib)^* = a-ib$). A partir das expressões $e^{-i\omega} = \cos(\omega)-i\,\text{sen}(\omega)$ e $e^{i\omega} = \cos(\omega)+i\,\text{sen}(\omega)$ podemos obter:

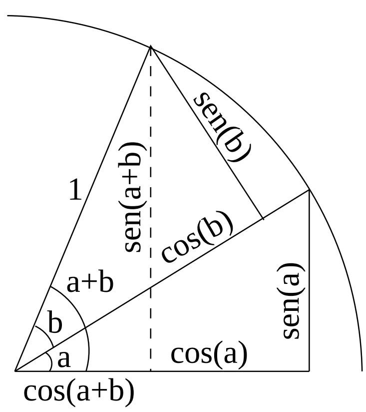
$$\cos(\omega) = \frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2} \qquad\qquad \text{sen}(\omega) = \frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}$$

Finalmente, usando as relações entre senos, cossenos e exponenciais complexas que vêm da relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\text{sen}(a+b) &= \tfrac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i} = \tfrac{e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{2i} \\
&= \tfrac{(\cos(a)+i\,\text{sen}(a))(\cos(b)+i\,\text{sen}(b))-(\cos(-a)+i\,\text{sen}(-a))(\cos(-b)+i\,\text{sen}(-b))}{2i} \\
&= \tfrac{(\cos(a)+i\,\text{sen}(a))(\cos(b)+i\,\text{sen}(b))-(\cos(a)-i\,\text{sen}(a))(\cos(b)-i\,\text{sen}(b))}{2i} \\
&= \tfrac{\left(\cos(a)\cos(b)+i\cos(a)\,\text{sen}(b)+i\,\text{sen}(a)\cos(b)+i^2\,\text{sen}(a)\,\text{sen}(b)\right)}{2i} \\
&\quad -\tfrac{\left(\cos(a)\cos(b)-i\cos(a)\,\text{sen}(b)-i\,\text{sen}(a)\cos(b)+i^2\,\text{sen}(a)\,\text{sen}(b)\right)}{2i} \\
&= \tfrac{2i\cos(a)\,\text{sen}(b)+2i\,\text{sen}(a)\cos(b)}{2i} \\
&= \cos(a)\,\text{sen}(b)+\text{sen}(a)\cos(b)
\end{aligned}$$

Vale a pena abrir um bom livro em nível de colegial e comparar esta dedução algébrica com a dedução trigonométrica/geométrica a partir da figura ao lado. Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) &= \tfrac{(e^{ia}+e^{-ia})}{2}\tfrac{(e^{ib}+e^{-ib})}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{\left(e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}\right)+\left(e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}\right)}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}\cos(a+b)+\tfrac{1}{2}\cos(a-b)
\end{aligned}$$



1.3 Série complexa de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com período T. Vamos tentar encontrar valores complexos $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $\omega_n = n\omega$.

Lema (Relações de Ortogonalidade)

$$\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt = \begin{cases} 0, & se\ n \neq m \\ T, & se\ n = m. \end{cases}$$

Prova

Se $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt &= \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt \\
&= \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega} \right]_0^T \\
&= \frac{e^{i(n-m)\omega T} - 1}{i(n-m)\omega} \\
&= \frac{\cos((n-m)2\pi) + i\,\mathrm{sen}((n-m)2\pi) - 1}{i(n-m)\omega} \\
&= \frac{1 + i \cdot 0 - 1}{i(n-m)\omega} = 0.
\end{aligned}$$

Se $n = m$ então $\displaystyle\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt = \int_0^T 1\, dt = T.$ ■

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t) e^{-i\omega_m t}\, dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt \\
&= F_m T
\end{aligned}$$

ou seja, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$,

$$F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt.$$

Definição (Síntese e Análise) *As equações* $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$ *e* $F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt$ *são chamadas de* **equação de síntese** *e* **equação de análise**, *respectivamente.*

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

Teorema (Simetria-Conjugada do Espectro de Fourier)

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova

Como $f(t)$ é real, temos $f(t) = (f(t))^*$. Além disso é fácil verificar que $(ab)^* = a^* b^*$. Assim,

$$\begin{aligned}
F_{-n} &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_{-n} t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^*(e^{-i\omega_n t})^*\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T (f(t)e^{-i\omega_n t})^*\,dt \\
&= \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right)^* \\
&= F_n^*. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

A expressão $F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt$ descreve o espectro de uma função periódica através das amplitudes e fases correspondentes aos diversos hamônicos. Seja $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ a representação polar de F_n. Então as parcelas $F_n e^{i\omega_n t}$ e $F_{-n}e^{i\omega_{-n} t}$ que aparecem na equação $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$, quando somadas, correspondem ao n-ésimo harmônico da função f. Lembrando que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$, temos a expressão do n-ésimo harmônico de f:

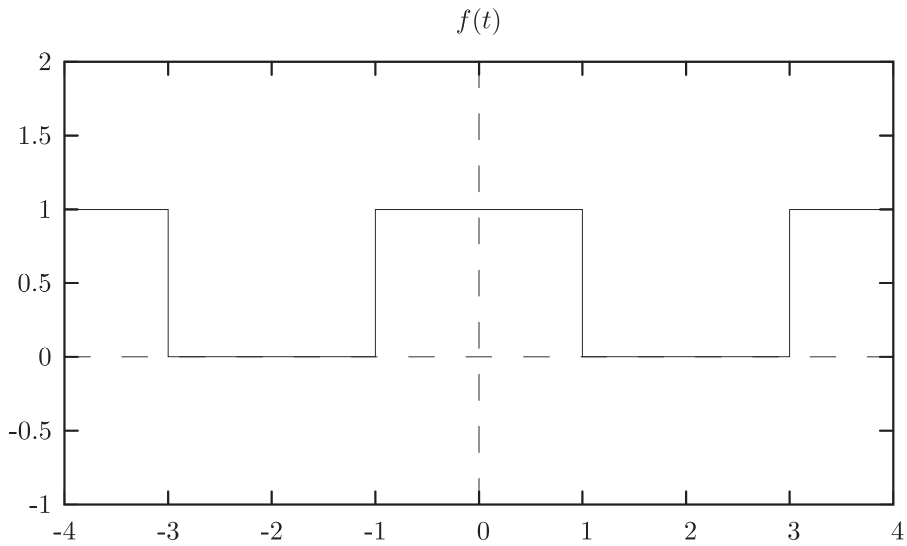
$$\begin{aligned}
F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n}e^{i\omega_{-n} t} &= \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t} \\
&= \alpha_n \left(e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} + e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)}\right) \\
&= 2\alpha_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).
\end{aligned}$$

Para $n = 0$ o coeficiente F_0 é calculado como

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

e corresponde ao valor médio da função f. Este "harmônico" tem a função de transladar verticalmente os demais harmônicos (que oscilam entre $+2\alpha_n$ e $-2\alpha_n$) para a "posição correta" da função f.

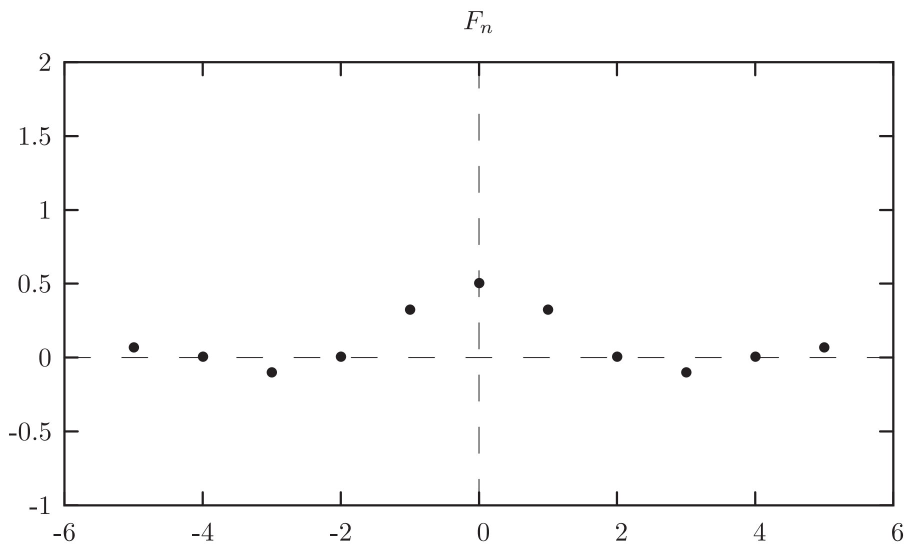
Exemplo: Considere a função $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t \leq -1 \\ 1, & -1 < t \leq 1 \\ 0, & -1 < t \leq 2 \end{cases}$, $f(t+4) = f(t),\ \forall t.$



Temos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_n = n\frac{\pi}{2}$. Assim, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} f(t) e^{-i\omega_n t}\, dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega_n t}\, dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-i\omega_n} - e^{i\omega_n}}{-i\omega_n} \right) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(\omega_n)}{\omega_n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

e para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{4} \displaystyle\int_{-2}^{2} f(t)\, dt = \frac{1}{2}.$

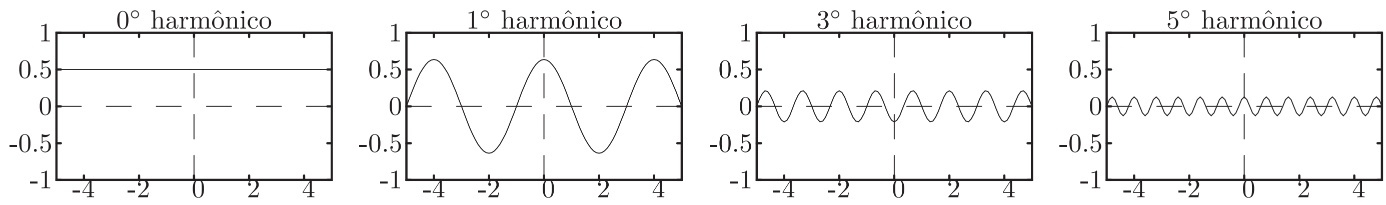


Observe que os extremos de integração utilizados nas contas acima foram $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Qualquer período completo pode ser utilizado. Pela equação de síntese,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} = \frac{1}{\pi}\left[\cdots + \frac{1}{5}e^{-i5\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3}e^{-i3\frac{\pi}{2}t} + e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{\pi}{2} + e^{i\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3}e^{i3\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{5}e^{i5\frac{\pi}{2}t} - \cdots\right]$$

e o n-ésimo harmônico (para n ímpar) é dado por

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n\pi}[e^{-in\frac{\pi}{2}t} + e^{in\frac{\pi}{2}t}] = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right).$$



Definição (Funções pares e ímpares)

Uma função f é **par** *se satisfaz $f(t) = f(-t)$, $\forall t$.*

Uma função f é **ímpar** *se satisfaz $f(t) = -f(-t)$, $\forall t$.*

Exemplos de função par e função ímpar são $\cos(t)$ e $\mathrm{sen}(t)$, respectivamente. Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

Lema

1. *Se f e g são pares, fg é par.*

2. *Se f e g são ímpares, fg é par.*

3. *Se f é par e g é ímpar, fg é ímpar.*

4. *Se f é par, $\int_{-U}^{U} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{U} f(t)\,dt$.*

5. *Se* f *é ímpar,* $\int_{-U}^{U} f(t)\,dt = 0.$

Sejam $F_n = A_n + iB_n$ e $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ as representações Cartesiana e polar do número complexo F_n, que estão relacionadas pelas expressões

$$\begin{cases} A_n = \alpha_n \cos\varphi_n \\ B_n = \alpha_n \operatorname{sen}\varphi_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n = \tan^{-1}\frac{B_n}{A_n} \end{cases}$$

Então a partir da propriedade $F_{-n} = F_n^*$ obtemos $A_{-n}+iB_{-n} = A_n - iB_n$ e também $\alpha_{-n}e^{i\varphi_{-n}} = \alpha_n e^{i(-\varphi_n)}$, de onde segue imediatamente o resultado:

Corolário (Paridade dos coeficientes de Fourier) *Se* $f(t)$ *é uma função real, então* A_n *e* α_n *são funções pares do argumento* n*, bem como* B_n *e* φ_n *são funções ímpares de* n*.*

Retomando o último exemplo (onda quadrada), observe que F_n é real e consequentemente par (pelo corolário anterior). Essa propriedade está associada com a paridade desta forma de onda quadrada do exemplo (pode-se contruir também ondas quadras ímpares, ou nem pares nem ímpares).

Definição (f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*; definimos as funções*

$$f_{par}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]$$

$$f_{ímpar}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$$

É imediato observar que f_{par} é uma função par e $f_{\text{ímpar}}$ é uma função ímpar. Mais ainda,

$$f_{\text{par}}(t)+f_{\text{ímpar}}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]+\frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right] = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t) + f(t) - f(-t)\right] = f(t).$$

Teorema (Decomposição em f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função periódica e seja* $\{F_n = A_n + iB_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *a série complexa de Fourier associada a* f*. Então* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *é a série complexa de Fourier associada a* f_{par} *e* $\{iB_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *é a série complexa de Fourier associada a* $f_{ímpar}$*.*

Prova

$$
\begin{aligned}
f_{\text{par}}(t) &= \frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n(-t)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \frac{e^{i\omega_n t}+e^{-i\omega_n t}}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cos(\omega_n t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) + \overbrace{iB_n \cos(\omega_n t)}^{\text{ímpar} \Longrightarrow =0} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) + \overbrace{iA_n \operatorname{sen}(\omega_n t)}^{\text{ímpar} \Longrightarrow =0} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t},
\end{aligned}
$$

que é a uma equação de síntese para a função f_{par} a partir dos coeficientes $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, o que implica que esta é a série complexa de Fourier associada a f_{par}.

A verificação de que $f_{\text{ímpar}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} iB_n e^{i\omega_n t}$ é análoga, e fica como exercício. ■

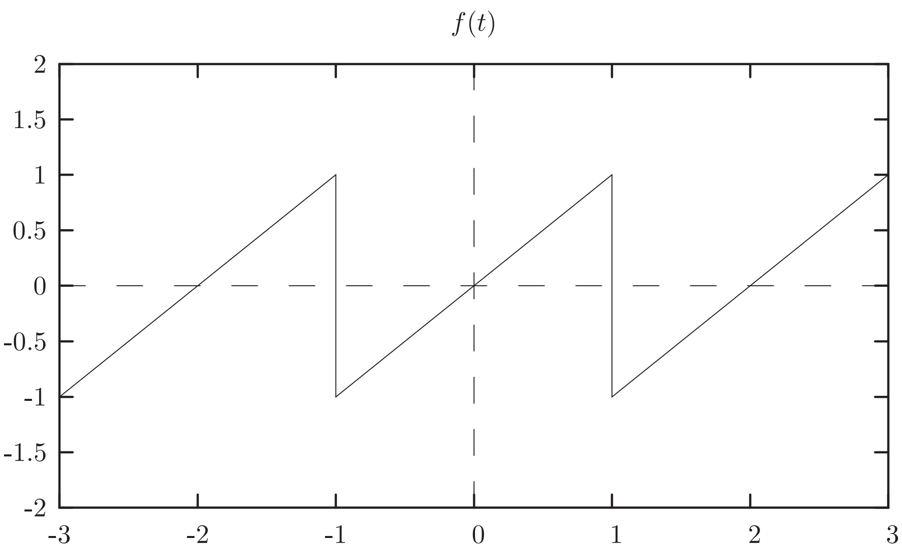
Uma consequência imediata do resultado anterior é:

Corolário

$$f(t) \text{ é par} \iff F(n) \text{ é real e par}$$

$$f(t) \text{ é ímpar} \iff F(n) \text{ é imaginária e ímpar}$$

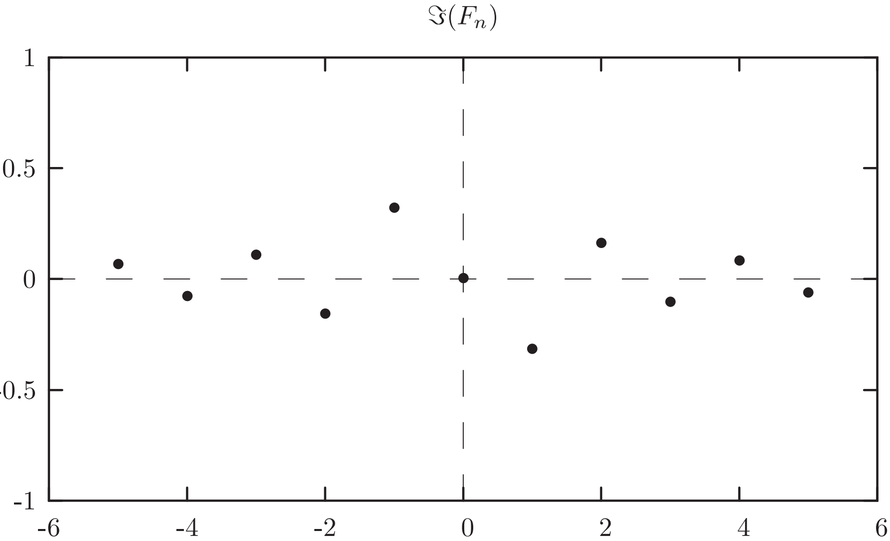
Exemplo: Considere a função



Temos $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, $\omega_n = n\pi$. Para $n \neq 0$,

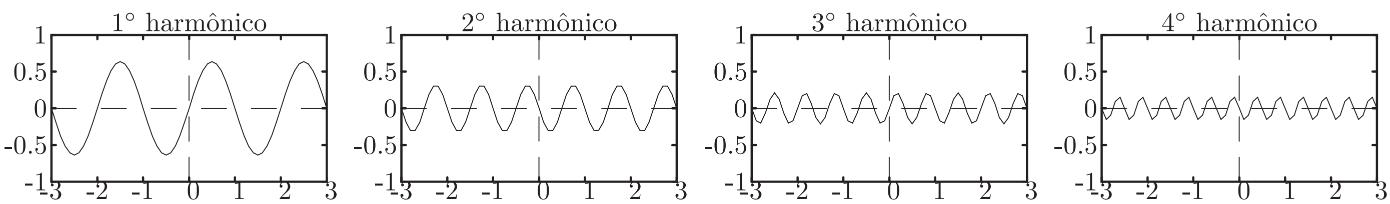
$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-i\omega_n t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \overbrace{t\cos(\omega_n t)}^{\text{ímpar}\Longrightarrow=0}\,dt - \frac{i}{2}\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{sen}(\omega_n t)\,dt \\
&= -i\int_{0}^{1} t\,\mathrm{sen}(\omega_n t)\,dt \\
&= -i\left[\frac{\mathrm{sen}(\omega_n t)}{\omega_n^2} - t\frac{\cos(\omega_n t)}{\omega_n}\right]_0^1 \\
&= -i\left[-\frac{(-1)^n}{n\pi}\right] = i\frac{(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = 0$.



Observe que F_n é puramente imaginária e consequentemente ímpar. O n-ésimo harmônico de f é dado por

$$i\frac{(-1)^{-n}}{-n\pi}e^{-in\pi t} + i\frac{(-1)^n}{n\pi}e^{in\pi t} = i\frac{(-1)^n}{n\pi}[e^{in\pi t} - e^{-in\pi t}] = -2\frac{(-1)^n}{n\pi}\,\mathrm{sen}(n\pi t).$$



2 Transformada de Fourier

Quando a função $f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é periódica é impossível escrevê-la como combinação linear de uma família de senos e cossenos harmonicamente relacionados. No entanto, muitas vezes é possível escrevê-la como combinação linear de todos os senos e cossenos que existem, utilizando todas as frequências $\omega \in \mathbb{R}$ disponíveis:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \quad \textbf{(equação de síntese)}$$

Para funções que satisfazem o critério $\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\, dt < \infty$, entre outras, pode-se provar que os valores de $F(\omega)$ que satisfazem a equação acima são dados por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \quad \textbf{(equação de análise)}$$

Definição *Se $f(t)$ e $F(\omega)$ estão relacionadas pelas equações de análise e síntese acima, denotamos esta relação por*

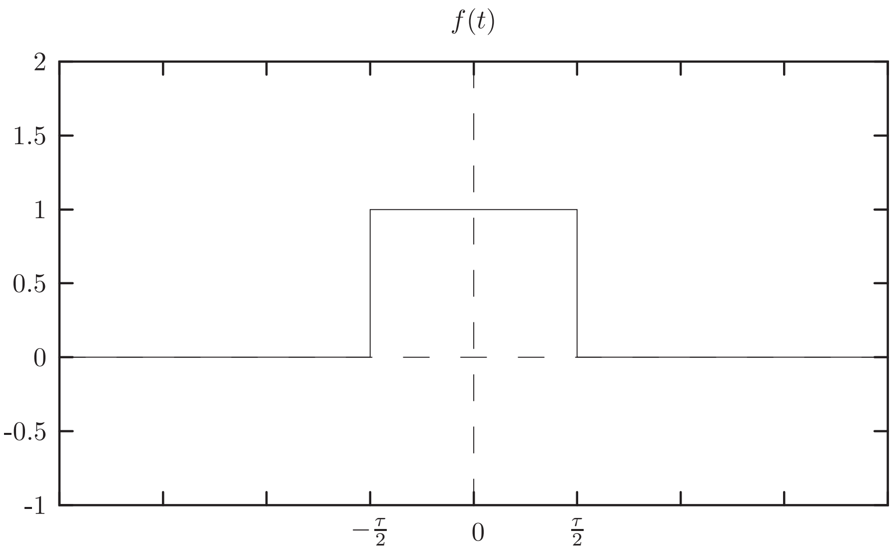
$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega).$$

Utilizamos as notações

$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = \alpha(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$$

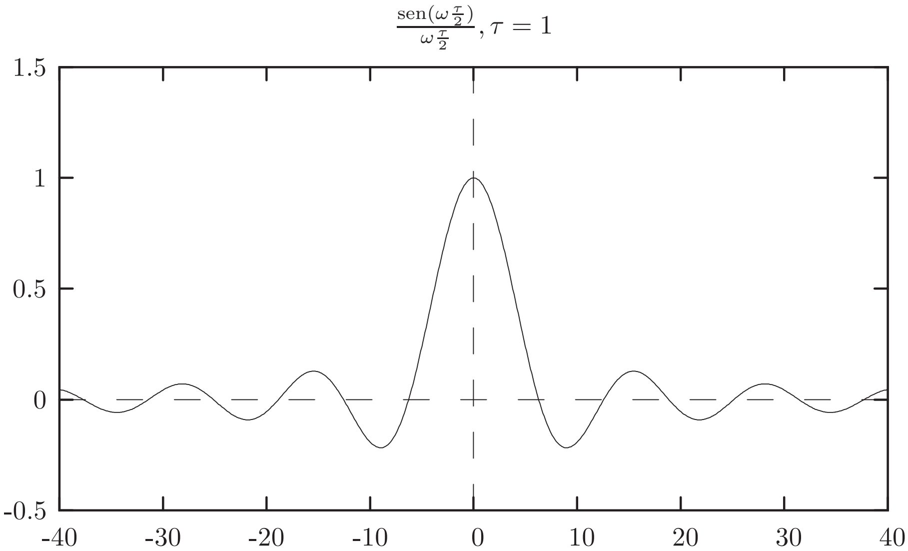
para as representações Cartesiana e polar de $F(\omega)$.

Exemplo: Considere a função



Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i0t}\, dt = \tau$. Para $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\omega} \left[\frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2i} \right] \\ &= \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega} = \tau \frac{\mathrm{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}}. \end{aligned}$$



Assim, pela equação de síntese,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tau\frac{\text{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}} e^{i\omega t}\, d\omega.$$

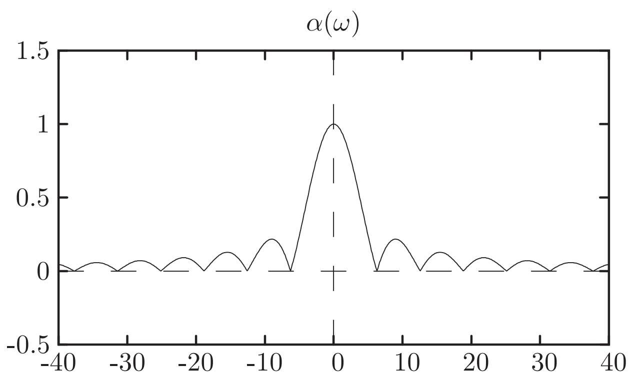
Frequentemente representamos a transformada de Fourier através dos espectros de *amplitude* e *fase*. Neste caso,

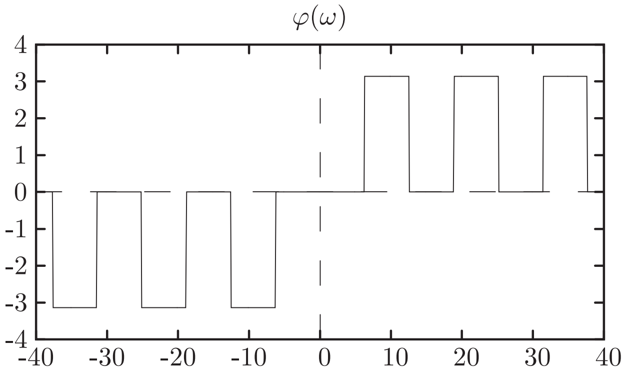
$$\alpha(\omega) = \tau\left|\frac{\text{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}}\right|$$

e

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } F(\omega) \geq 0 \\ \pm\pi, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A escolha entre $\pm\pi$ na expressão de $\varphi(\omega)$, embora arbitrária, deve preservar a propriedade de que $\varphi(\omega)$ é uma função ímpar.





Teorema (Propriedades da Transformada de Fourier)

1. *Linearidade: se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *então*

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

2. *Conjugação:* $F(-\omega) = F^*(\omega)$.

3. *Simetria:*

   $A(\omega)$ *e* $\alpha(\omega)$ *são funções pares.*

   $B(\omega)$ *e* $\varphi(\omega)$ *são funções ímpares.*

   $f_{par} \longleftrightarrow A(\omega)$.

   $f_{ímpar} \longleftrightarrow iB(\omega)$.

   $f(t)$ *é par* $\iff$ $F(\omega)$ *é real e par.*

   $f(t)$ *é ímpar* $\iff$ $F(\omega)$ *é imaginária e ímpar.*

4. *Propriedade da Área*

   $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(0);$

   $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,d\omega = 2\pi f(0).$

5. *Dualidade: Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *então*

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega).$$

6. *Mudança de Escala: Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $\beta \neq 0$ *então*

$$f(\beta t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\beta|} F(\frac{\omega}{\beta}).$$

7. *Deslocamento no Tempo: Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $\tau \in \mathbb{R}$ *então*

$$f(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau} F(\omega).$$

8. Deslocamento na Frequência: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$ então

$$e^{i\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0).$$

Prova

A verificação das propriedades (1)-(4) segue os mesmos argumentos das respectivas propriedades da série complexa de Fourier, ficando como exercício.

5. Dualidade: Aplicando a equação de análise para a função $F(t)$, verificamos que sua transformada de Fourier será

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

Trocando os nomes das variáveis t e ω na equação de síntese para $f(\cdot)$ temos $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t}\, dt$. Deste modo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i(-\omega)t}\, dt = 2\pi f(-\omega).$$

6. Mudança de Escala: Se $\beta > 0$, então a transformada de Fourier de $f(\beta t)$ será

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(\beta t) e^{-i\omega t}\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega \frac{z}{\beta}} \frac{dz}{\beta} \qquad (z = \beta t) \\
&= \tfrac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\frac{\omega}{\beta} z}\, dz \\
&= \tfrac{1}{\beta} F(\tfrac{\omega}{\beta}).
\end{aligned}$$

O caso $\beta < 0$ fica como exercício.

7. Deslocamento no Tempo: A transformada de Fourier de $f(t-\tau)$ é

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-i\omega t}\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega(z+\tau)}\, dz \qquad (z = t - \tau) \\
&= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega z}\, dz \\
&= e^{-i\omega\tau} F(\omega).
\end{aligned}$$

8. Deslocamento na Frequência: Usando a equação de síntese (transformada de Fourier inversa) para a função $F(\omega - \omega_0)$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-\omega_0)e^{i\omega t}\,d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)e^{i(\theta+\omega_0)t}\,d\theta \quad (\theta = \omega - \omega_0) \\
&= e^{i\omega_0 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)e^{i\theta t}\,d\theta \\
&= e^{i\omega_0 t} f(t).
\end{aligned}$$

■

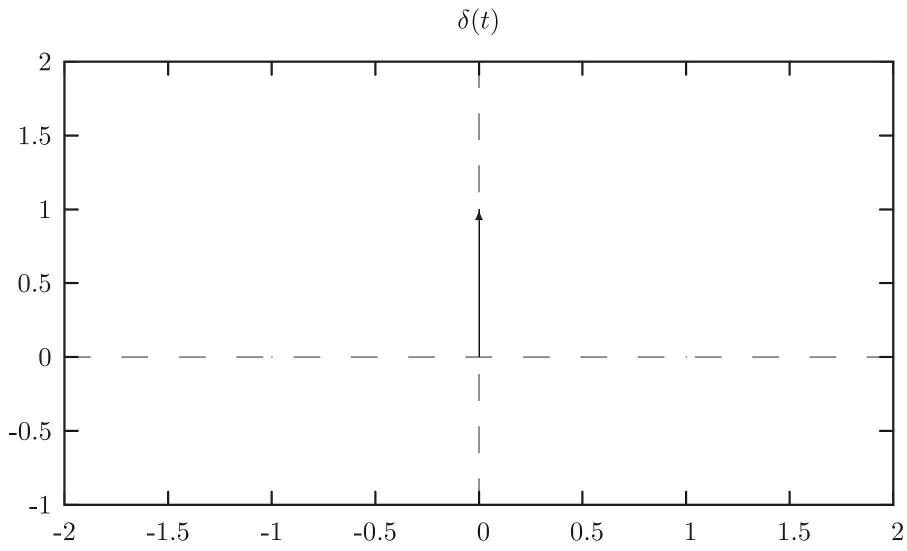
2.1 Transformada do limite de funções

Algumas vezes não é possível obter $F(\omega)$ a partir da definição, mas através de limites. Se $f(t) = \lim_{k\longrightarrow K} f^k(t)$, $f^k(t) \longleftrightarrow F^k(\omega)$ para cada k e além disso existe o $\lim_{k\longrightarrow K} F^k(\omega)$, então este limite corresponde à transformada de Fourier de $f(t)$, possuindo todas as propriedades da transformada obtida pela definição.

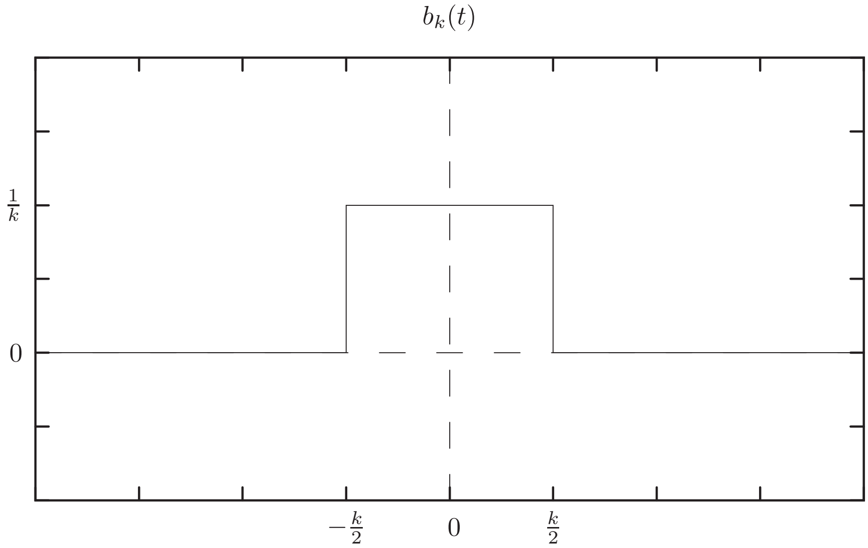
Exemplo: Delta de Dirac. Esta função generalizada (distribuição) é definida pelas condições

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \ \forall t \neq 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \end{cases}$$

sendo que o valor $\delta(0)$ não está definido. Frequentemente representamos esta distribuição usando um vetor com altura representando seu *peso* (o valor da integral na definição):



O Delta de Dirac pode ser visto como o limite das funções $b_k(t)$ para $k \longrightarrow 0^+$:

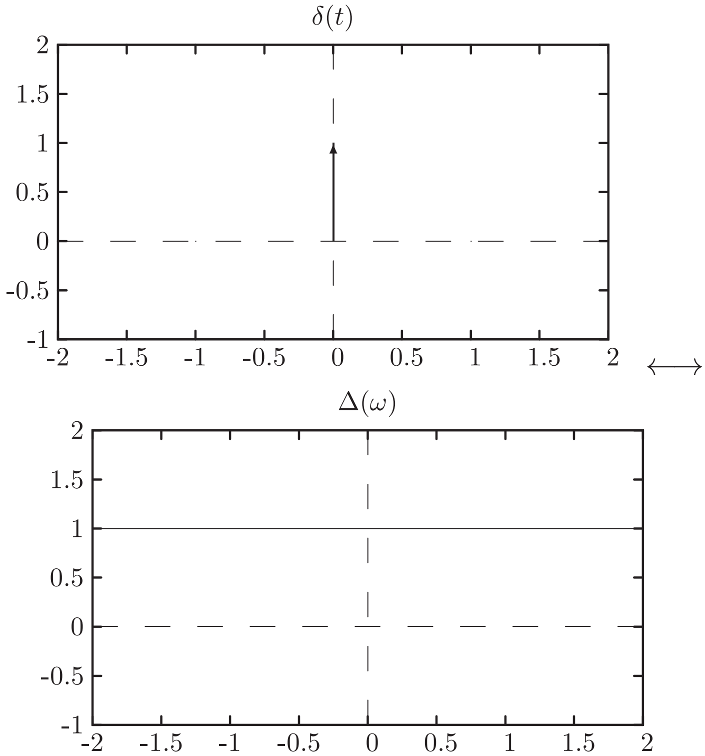


Pelo exemplo do pulso quadrado na seção anterior, juntamente com a propriedade de linearidade, sabemos que a transformada de Fourier da função $b_k(t)$ é

$$B_k(\omega) = \frac{1}{k}\left[k\frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{k}{2})}{\omega\frac{k}{2}}\right] = \frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{k}{2})}{\omega\frac{k}{2}}.$$

Quando $k \longrightarrow 0^+$, $B_k(\omega) \longrightarrow 1$ para qualquer valor de ω. Assim a transformada de Fourier do Delta de Dirac é a função constante $\Delta(\omega) = 1$, ou ainda,

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$$



Pela equação de síntese,

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega$$

de onde também obtemos
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega = 2\pi\delta(t).$$

Podemos definir deltas de Dirac localizados em instantes $t \neq 0$ e com pesos (valor da integral) diferentes de 1. Em geral definimos $\delta_{K,\tau} = K\delta(t-\tau)$, que satisfaz

$$\begin{cases} \delta_{K,\tau}(t) = 0, \ \forall t \neq \tau \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{K,\tau}(t)\, dt = K. \end{cases}$$

Exemplo: Transformada do seno e cosseno

Podemos obter as transformadas do seno e cosseno utilizando as expressões $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}$ e $\operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}$. Para isso, lembremos que

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$$

Pela propriedade de deslocamento no tempo,

$$\delta(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau}$$

e por dualidade,
$$e^{-it\tau} \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega-\tau) = 2\pi\delta(\omega+\tau).$$

Substituindo τ por $-\omega_0$ e $+\omega_0$ obtemos, respectivamente,

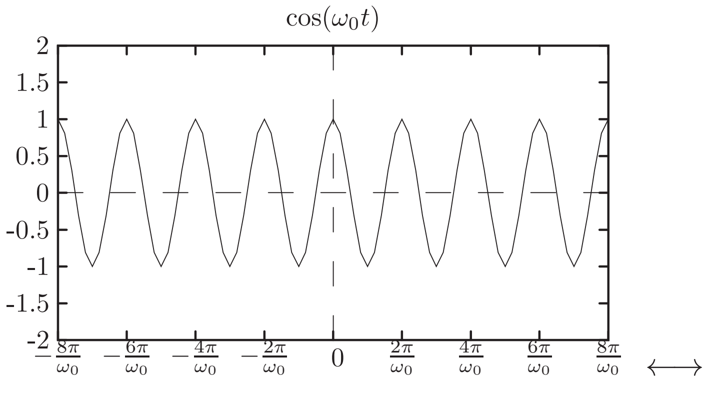
$$e^{i\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

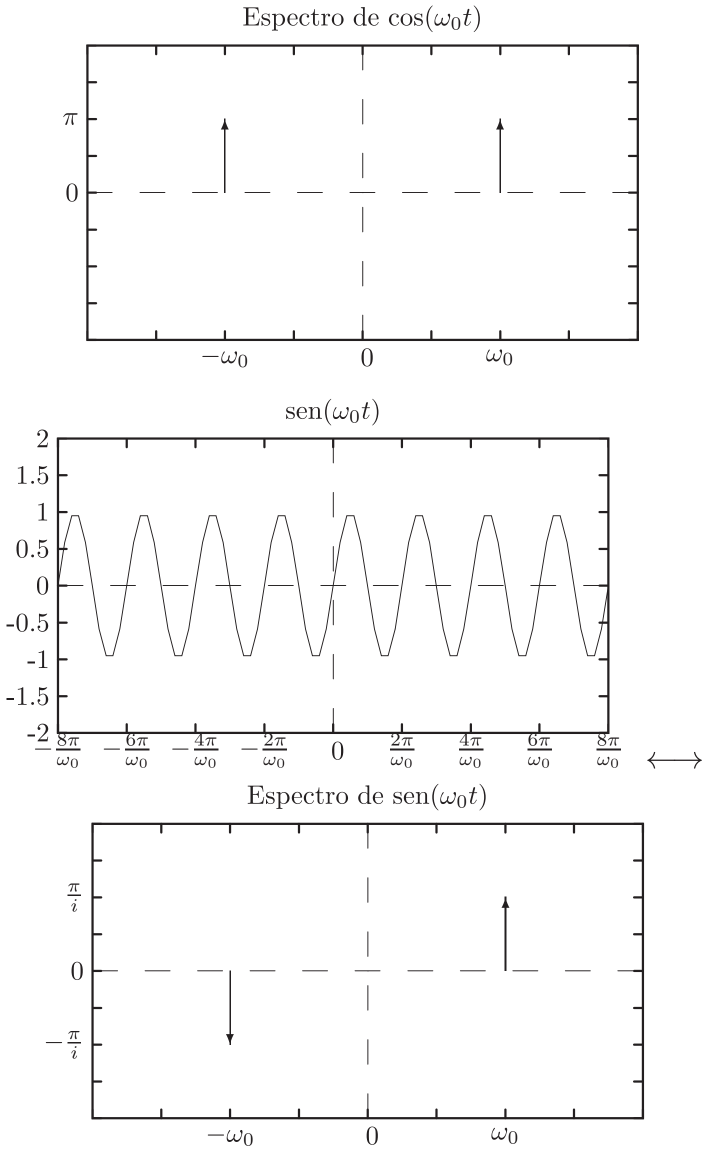
e

$$e^{-i\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0),$$

de onde, finalmente,
$$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

e
$$\operatorname{sen}(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{i}\delta(\omega-\omega_0) - \frac{\pi}{i}\delta(\omega+\omega_0).$$





A propriedade a seguir chama a atenção para o fato de que a função $\delta(t-\tau)$ quando multiplicada por uma função qualquer $f(\cdot)$ preserva (isto é, amostra) somente o valor $f(\tau)$.

Lema (Propriedade da amostragem) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\tau \in \mathbb{R}$. *Então*

$$f(t)\delta(t-\tau) = f(\tau)\delta(t-\tau).$$

Em particular,

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$

Prova

Temos $f(t)\delta(t-\tau) = 0, \ \forall t \neq \tau$ pela definição de $\delta(\cdot)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)}\,d\omega\,dt \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt\right] e^{-i\omega\tau}\,d\omega \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega)e^{-i\omega\tau}\,d\omega \\
&= \left(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega\tau}\right)^{*} d\omega \\
&= (f(\tau))^{*} = f(\tau),
\end{aligned}$$

o que mostra que $f(t)\delta(t-\tau)$ satisfaz a definição de $\delta_{K,\tau}$ com $K = f(\tau)$. ■

2.2 Convolução

A operação de convolução surge como resposta à seguinte pergunta: *se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$*, qual é a função* $h(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$*?*

Definição (convolução) *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$*, a* **convolução** *de* f *e* g *é definida por*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Lema *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ *então*

$$h(t) = (f * g)(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

Prova

Aplicando a equação de análise para a função $h(t) = (f * g)(t)$ temos

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right] e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}\,dt\right] f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \\
&= G(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau = F(\omega)G(\omega). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Observe que a operação de convolução é simétrica, pois

$$
\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} f(t-\zeta)g(\zeta)\,(-d\zeta) \quad (\zeta = t-\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\zeta)g(\zeta)\,d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau \\
&= (g * f)(t).
\end{aligned}
$$

Exemplo: Lembrando da propriedade da amostragem

$$f(t)\delta(t-\tau) = f(\tau)\delta(t-\tau),$$

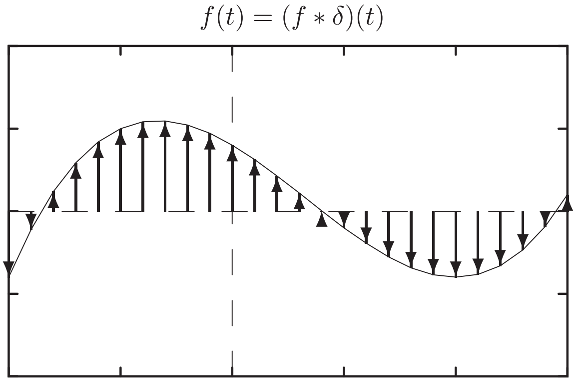
temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau,$$

e como $f(t)$ não depende de τ na primeira integral, $f(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$, ou seja,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = (f * \delta)(t).$$

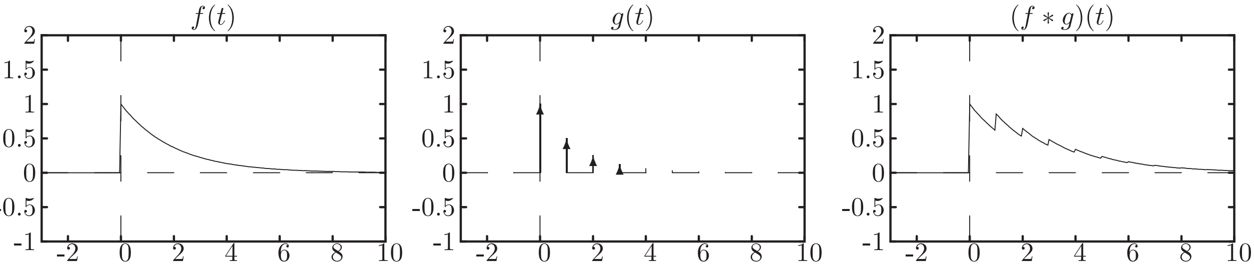
Disso concluimos que $\delta(t)$ é o elemento neutro em relação à operação de convolução, e também que $f(t)$ pode ser vista como uma somatória (integral) das funções $f(\tau)\delta(t-\tau)$ para todos os valores de τ possíveis:



Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer, e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(t-\gamma_n)$. Então, usando a propriedade da amostragem,

$$
\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(\tau - \gamma_n) \right) d\tau \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \delta(\tau - \gamma_n) \right) d\tau \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\gamma_n) \delta(\tau - \gamma_n) \right) d\tau \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n f(t-\gamma_n) \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n f(t-\gamma_n),
\end{aligned}
$$

ou seja, $(f * g)$ corresponde à somatória de várias cópias da função $f(t)$ com fatores de escala β_n e deslocadas no tempo de γ_n.



Lema (Convolução na frequência) *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ *então*

$$h(t) = f(t)g(t) \longleftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega).$$

Prova

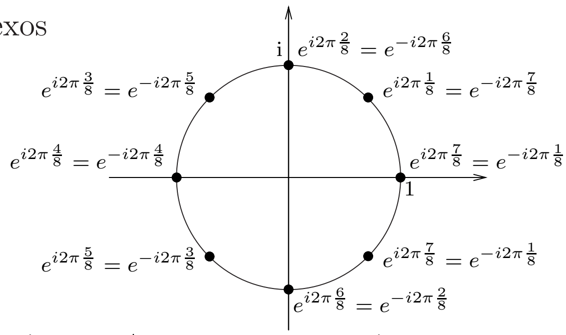
Exercício. ■

3 Transformada de Fourier Discreta

Dado $N \in \mathbb{N}$, considere a família de números complexos

$$\left\{ e^{i2\pi\frac{k}{N}} \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, N-1 \right\},$$

que divide o círculo unitário em N partes iguais:



Vamos verificar que a família de funções (de k) $\left\{ e^{i2\pi q\frac{k}{N}} \;\middle|\; q = 0, \ldots, N-1 \right\}$ possui uma propriedade de ortogonalidade em relação ao produto interno em $\mathbb{C}^N$ definido por $\langle a, b\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^*$. Para simplificar a notação, vamos utilizar o símbolo $W = e^{-i2\pi\frac{1}{N}}$ de tal forma que

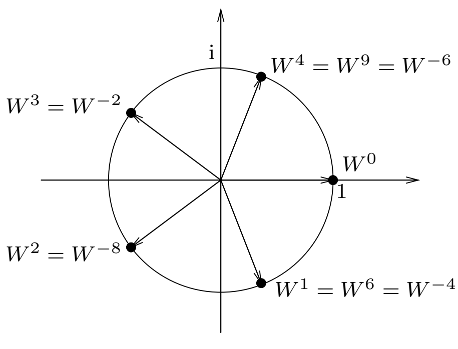
$$(W^q)^k = W^{qk} = e^{-i2\pi q\frac{k}{N}}.$$

Lema (Relações de Ortogonalidade)

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-qk}(W^{-rk})^* = \begin{cases} 0, & se\ q \neq r \\ N, & se\ q = r. \end{cases}$$

Exemplo: Considere $N = 5$, $q = 2$ e $r = 3$. Então, para os vetores

$$a = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-2} \\ W^{-4} \\ W^{-6} \\ W^{-8} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-3} \\ W^{-6} \\ W^{-9} \\ W^{-12} \end{bmatrix}$$



temos

$$\langle a, b\rangle = W^0W^0 + W^{-2}W^3 + W^{-4}W^6 + W^{-6}W^9 + W^{-8}W^{12} = 1 + W + W^2 + W^3 + W^4 = 0$$

e

$$\langle a, a\rangle = W^0W^0 + W^{-2}W^2 + W^{-4}W^4 + W^{-6}W^6 + W^{-8}W^8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Prova (do Lema)

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} W^{-qk}(W^{-rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1}(W^{-(q-r)})^k = \frac{1-(W^{-(q-r)})^N}{1-W^{-(q-r)}} \\
&= \frac{1-(W^N)^{-(q-r)}}{1-W^{-(q-r)}} = \frac{1-1}{1-W^{-(q-r)}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-qk}(W^{-qk})^* = \sum_{k=0}^{N-1}(W^0)^k = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N. \quad \blacksquare$$

Seja $f = (f_0, \ldots, f_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$. Vamos tentar encontrar um vetor $F = (F_0, \ldots, F_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}.$$

Usando as relações de ortogonalidade, podemos obter os valores de F_n, multiplicando a expressão acima por $e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m\frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}\right) e^{-i2\pi m\frac{k}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi n\frac{k}{N}} e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}\right) \\
&= \frac{1}{N} F_m N.
\end{aligned}$$

ou seja, para $n = 0, \ldots, N-1$,

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n\frac{k}{N}}.$$

Definição (Síntese e Análise) *As equações* $f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$ *e* $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n\frac{k}{N}}$ *são chamadas de* **equação de síntese** *e* **equação de análise***, respectivamente. Representamos esta relação por* $(f_0, \ldots, f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_0, \ldots, F_{N-1})$ *ou simplesmente* $f \longleftrightarrow F$*. Utilizamos as notações* $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ *para as representações Cartesiana e polar de* F_n*.*

Lema (Propriedades da Transformada Discreta de Fourier)

1. *Linearidade: se* $f \longleftrightarrow F$, $g \longleftrightarrow G$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *então*

$$\beta f + \gamma g \longleftrightarrow \beta F + \gamma G.$$

2. *Periodicidade:*

   As funções $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ *definidas pelas expressões*

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

   e

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

   são periódicas com período N.

3. *Conjugação:* $F_{-n} = F_n^*$.

4. *Simetria:*

   A_n *e* α_n *são funções pares.*

   B_n *e* φ_n *são funções ímpares.*

   $f_{par} \longleftrightarrow A_n$.

   $f_{ímpar} \longleftrightarrow iB_n$.

   $f(t)$ *é par* $\iff$ F_n *é real e par.*

   $f(t)$ *é ímpar* $\iff$ F_n *é imaginária e ímpar.*

5. *Propriedade da Média:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f_k = F_0$ *e* $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n = f_0$.

6. *Dualidade: Se* $f \longleftrightarrow F$ *então*

$$F \longleftrightarrow N(f_0, f_{-1}, f_{-2} \dots, f_{-(N-1)}).$$

7. *Deslocamento no Tempo: Se* $f \longleftrightarrow F$ *e* $m \in \mathbb{Z}$ *então*

$$(f_{-m}, f_{1-m}, \dots, f_{N-1-m}) \longleftrightarrow (W^0 F_0, W^m F_1, W^{2m} F_2, \dots, W^{(N-1)m} F_{N-1}).$$

8. *Deslocamento na Frequência: Se* $f \longleftrightarrow F$ *e* $m \in \mathbb{Z}$ *então*

$$(W^0 f_0, W^m f_1, W^{2m} f_2, \dots, W^{(N-1)m} f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_m, f_{1+m}, \dots, f_{N-1+m}).$$

Prova

Exercício. ■

3.1 Transformada Rápida de Fourier

O método direto de cálculo da transformada discreta de Fourier a partir da expressão

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n\frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{kn},\ n = 0, \ldots, N-1$$

utiliza N^2 produtos entre números complexos e $N(N-1)$ somas, possuindo assim complexidade computacional $\mathcal{O}(N^2)$. O método FFT (Fast Fourier Transform) permite obter o mesmo resultado em tempo $\mathcal{O}(N \log N)$.

Comecemos com alguns exemplos pequenos. Considere $N = 2$; neste caso a expressão da transformada de Fourier fica

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_1 \\ f_0 - f_1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, são necessárias apenas duas operações aritméticas. Se $N = 4$ podemos escrever

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},$$

onde a última matriz foi obtida pela propriedade de circularidade dos valores W^n. Esta matriz pode ser fatorizada como segue (por enquanto não pergunte como...)

$$\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^1 \\ 0 & 0 & W^0 & -W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^0 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & W^0 \\ W^0 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & -W^0 \end{bmatrix}.$$

Isso mostra que F pode ser obtido em três etapas, calculando-se

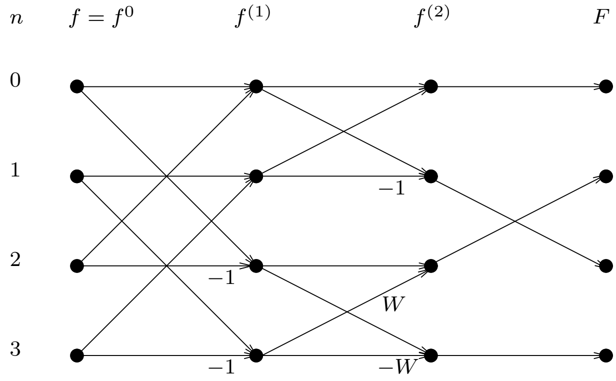
$$\begin{bmatrix} f_0^{(1)} \\ f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & W^0 \\ W^0 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & W^0 & 0 & -W^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_2 \\ f_1 + f_3 \\ f_0 - f_2 \\ f_1 - f_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} f_0^{(2)} \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^1 \\ 0 & 0 & W^0 & -W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{(1)} \\ f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{(1)} + f_1^{(1)} \\ f_0^{(1)} - f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + W f_3^{(1)} \\ f_2^{(1)} - W f_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

e finalmente

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_1^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Observe que as duas primeiras etapas correspondem a N operações aritméticas cada, e a última etapa apenas rearranja os elementos do vetor. Frequentemente indicamos as operações acima através de diagramas, com setas indicando parcelas nas expressões e índices nas setas indicando multiplicadores. As expressões acima seriam representadas como:



Vamos ver a seguir que o método FFT geral para $N = 2^\sigma$ calcula σ vetores $f^{(1)}, \ldots, f^{(\sigma)}$ intermediários, cada um a um custo $\mathcal{O}(N)$, e obtém o resultado final rearranjando os elementos de $f^{(\sigma)}$. No total, o método utiliza $\mathcal{O}(N\sigma) = \mathcal{O}(N \log N)$ operações aritméticas.

Para entender o modo como os vetores intermediários são calculados, considere a expressão da transformada discreta de Fourier, onde vamos substituir n e k por suas representações binárias $n = (n_{\sigma-1}, \ldots, n_0) = \sum_{j=0}^{\sigma-1} n_j 2^j$ e $k = (k_{\sigma-1}, \ldots, k_0) = \sum_{j=0}^{\sigma-1} k_j 2^j$:

$$F_{(n_{\sigma-1},\ldots,n_0)} = \sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_{\sigma-1}=0}^{1} f_{(k_{\sigma-1},\ldots,k_0)} W^{\left(\sum_{j=0}^{\sigma-1} n_j 2^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\sigma-1} k_j 2^j\right)},\ n_j = 0, 1,\ j = 0, \ldots, \sigma - 1.$$

Utilizando a propriedade $W^N = W^{2^\sigma} = 1$, podemos simplificar o expoente de W na expressão acima:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=0}^{\sigma-1} n_j 2^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\sigma-1} k_j 2^j\right) &= \sum_{j=0}^{\sigma-1}\left(\sum_{l=0}^{\sigma-1} n_l 2^{l+j}\right) k_j \\ &= \sum_{j=0}^{\sigma-1}\left(\sum_{l=0}^{\sigma-1-j} n_l 2^{l+j}\right) k_j,\end{aligned}$$

de onde podemos escrever

$$F_{(n_{\sigma-1},\ldots,n_0)} = \sum_{k_0=0}^{1} \cdots \sum_{k_{\sigma-2}=0}^{1} \overbrace{\sum_{k_{\sigma-1}=0}^{1} f_{(k_{\sigma-1},\ldots,k_0)} W^{n_0 2^{\sigma-1} k_{\sigma-1}}}\, W^{(n_1 2^{\sigma-1} + n_0 2^{\sigma-2}) k_{\sigma-2}} \ldots W^{(n_{\sigma-1} 2^{\sigma-1} + n_{\sigma-2} 2^{\sigma-2} + \cdots + n_0 2^0) k_0}.$$

Observe que a expressão central (indicada pela chave) depende dos valores n_0 e $k_{\sigma-2}, \ldots, k_0$ (a variável $k_{\sigma-1}$ está atrelada à somatória, percorrendo os valores 0 e 1). Definiremos assim um vetor $f^{(1)} \in \mathbb{C}^N$ indexado por $(n_0, k_{\sigma-2}, \ldots, k_0)$ pela expressão

$$f^{(1)}_{(n_0,k_{\sigma-2},\ldots,k_0)} = \sum_{k_{\sigma-1}=0}^{1} f_{(k_{\sigma-1},k_{\sigma-2},\ldots,k_0)} W^{n_0 2^{\sigma-1} k_{\sigma-1}}.$$

Percorrendo a fórmula de $F_{(n_{\sigma-1},\ldots,n_0)}$ de dentro para fora observamos a expressão seguinte como

$$\sum_{k_{\sigma-2}=0}^{1} f^{(1)}_{(n_0,k_{\sigma-2},k_{\sigma-3},\ldots,k_0)} W^{(n_1 2^{\sigma-1} + n_0 2^{\sigma-2}) k_{\sigma-2}}$$

que depende dos valores n_0, n_1 e $k_{\sigma-3}, \ldots, k_0$ (a expressão não depende de $k_{\sigma-2}$ que está ligado à somatória). Assim podemos definir outro vetor $f^{(2)} \in \mathbb{C}^N$ indexado por $(n_0, n_1, k_{\sigma-3}, \ldots, k_0)$ pela expressão

$$f^{(2)}_{(n_0,n_1,k_{\sigma-3},\ldots,k_0)} = \sum_{k_{\sigma-2}=0}^{1} f^{(1)}_{(n_0,k_{\sigma-2},k_{\sigma-3},\ldots,k_0)} W^{(n_1 2^{\sigma-1}+n_0 2^{\sigma-2})k_{\sigma-2}}.$$

Podemos continuar definindo estes vetores de maneira análoga; na ν-ésima etapa teremos a expressão

$$f^{(\nu)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},n_{\nu-1},k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} = \sum_{k_{\sigma-\nu}=0}^{1} f^{(\nu-1)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},k_{\sigma-\nu},k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} W^{(n_{\nu-1}2^{\sigma-1}+n_{\nu-2}2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^{\sigma-\nu})k_{\sigma-\nu}},$$

que depende explicitamente de $n_0, \ldots, n_{\nu-1}$ e $k_{\sigma-\nu-1}, \ldots, k_0$ ($k_{\sigma-\nu}$ está ligada à somatória). A expressão acima define a expressão de σ vetores intermediários $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(\sigma)}$ (considerando o vetor f original como $f^{(0)}$). O último vetor

$$f^{(\sigma)}_{(n_0,\ldots,n_{\sigma-2},n_{\sigma-1})} = \sum_{k_0=0}^{1} f^{(\sigma-1)}_{(n_0,\ldots,n_{\sigma-2},k_0)} W^{(n_{\sigma-1}2^{\sigma-1}+n_{\sigma-2}2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^0)k_0}$$

possui índices $(n_0, \ldots, n_{\sigma-1})$ que correspondem aos bits do vetor $F_{(n_{\sigma-1},\ldots,n_0)}$ invertidos de posição. A última etapa do processo, que corresponde à atribuição na expressão de $F_{(n_{\sigma-1},\ldots,n_0)}$, é simplesmente

$$F_{(n_{\sigma-1},\ldots,n_0)} = f^{(\sigma)}_{(n_0,\ldots,n_{\sigma-1})}$$

que por esta razão é denominada de etapa da inversão de bits.

A expressão

$$f^{(\nu)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},n_{\nu-1},k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} = \sum_{k_{\sigma-\nu}=0}^{1} f^{(\nu-1)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},k_{\sigma-\nu},k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} W^{(n_{\nu-1}2^{\sigma-1}+n\nu-2_2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^{\sigma-\nu})k_{\sigma-\nu}}$$

pode ser melhor compreendida ao abrirmos a somatória substituindo os valores de $k_{\sigma-\nu}$:

$$f^{(\nu)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},n_{\nu-1},k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} = f^{(\nu-1)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},0,k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} + f^{(\nu-1)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},1,k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} W^{n_{\nu-1}2^{\sigma-1}+n_{\nu-2}2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^{\sigma-\nu}}.$$

Considere os valores $n_{\nu-1} = 0$ e $n_{\nu-1} = 1$ na expressão acima. Observando que

$$\begin{aligned} W^{(1)2^{\sigma-1}+n_{\nu-2}2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^{\sigma-\nu}} &= W^{2^{\sigma-1}} W^{(0)2^{\sigma-1}+n_{\nu-2}2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^{\sigma-\nu}} \\ &= W^{\frac{N}{2}} W^{(0)2^{\sigma-1}+n_{\nu-2}2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^{\sigma-\nu}} \\ &= -W^{(0)2^{\sigma-1}+n_{\nu-2}2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^{\sigma-\nu}}, \end{aligned}$$

podemos escrever o par de equações

$$\begin{cases} f^{(\nu)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},0,k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} = f^{(\nu-1)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},0,k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} + f^{(\nu-1)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},1,k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} W^{n_{\nu-2}2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^{\sigma-\nu}} \\ f^{(\nu)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},1,k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} = f^{(\nu-1)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},0,k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} - f^{(\nu-1)}_{(n_0,\ldots,n_{\nu-2},1,k_{\sigma-\nu-1},\ldots,k_0)} W^{n_{\nu-2}2^{\sigma-2}+\cdots+n_0 2^{\sigma-\nu}} \end{cases}$$

ou equivalentemente, substituindo a representação binária pela decimal,

$$\begin{cases} f_m^{(\nu)} = f_m^{(\nu-1)} + f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)} W^{p(m)} & \text{para qualquer } m \text{ da forma} \\ f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu)} = f_m^{(\nu-1)} - f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)} W^{p(m)} & m = (m_{\sigma-1}, \ldots, m_{\sigma-(\nu-1)}, 0, m_{\sigma-(\nu+1)}, \ldots, m_0)_2 \end{cases}$$

onde o expoente $p(m)$ é calculado a partir de $m = (m_{\sigma-1}, \ldots, m_0)_2$ através das operações

1. deslocamento para a direita de $\sigma - \nu$ bits: resultado= $(\overbrace{0, \ldots, 0}^{\sigma-\nu \text{ bits}}, m_{\sigma-1}, \ldots, m_{\sigma-\nu})_2$;

2. inversão da representação em σ bits: resultado=$(m_{\sigma-\nu}, \ldots, m_{\sigma-1}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{\sigma-\nu \text{ bits}})_2$.

Pela simetria das equações acima, o par de valores

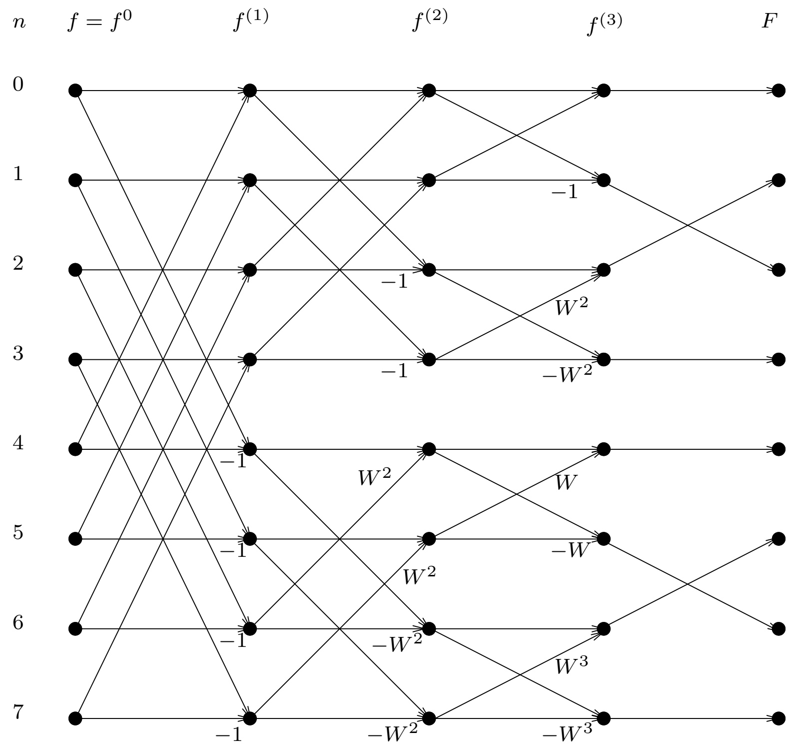
$$\left(f_m^{(\nu-1)}, f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)}\right)$$

recebe o nome de par dual em relação à etapa ν do FFT. Note que a distância entre índices dos elementos do par dual é de

$$2^{\sigma-\nu} = \frac{2^\sigma}{2^\nu} = \frac{N}{2^\nu}.$$

Observe ainda que para todos os valores de m da forma $m = (m_{\sigma-1}, ..., m_{\sigma-(\nu-1)}, 0, m_{\sigma-(\nu+1)}, ..., m_0)_2$ os valores $f_m^{(\nu-1)}$ e $f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)}$ só aparecem nas expressões de $f_m^{(\nu)}$ e $f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu)}$. Isso mostra que o cálculo de todas as etapas do FFT pode ser feito em um único vetor em $\mathbb{C}^N$, guardando os valores das expressões $f_m^{(\nu-1)}$ e $f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu-1)} W^{p(m)}$ em variáveis auxiliares antes de efetuar as atribuições em $f_m^{(\nu)}$ e $f_{m+2^{\sigma-\nu}}^{(\nu)}$ (apenas uma variável auxiliar é estritamente necessária se as atribuições forem executadas na ordem contrária à indicada acima).

Para efeito de ilustração, as três etapas do FFT para $N = 8$ teriam um diagrama como segue:



Exemplo: Considere o vetor $f = f^{(0)} = (1,0,1,0,1,0,1,0)' \in \mathbb{R}^8$. Sua transformada de Fourier discreta pode ser calculada com auxílio do diagrama do FFT acima:

$$\begin{array}{ccccccccc} f = f^{(0)} & & f^{(1)} & & f^{(2)} & & f^{(3)} & & F \\ \begin{bmatrix} 1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 2\\0\\2\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 4\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 4\\4\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 4\\0\\0\\0\\4\\0\\0\\0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Lembrando da equação de síntese da transformada discreta de Fourier

$$f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}},$$

observamos que o vetor original é construido a partir das funções periódicas

$$\frac{1}{N}\begin{bmatrix} e^{i2\pi\cdot 0\cdot\frac{n}{N}} \\ e^{i2\pi\cdot 1\cdot\frac{n}{N}} \\ \vdots \\ e^{i2\pi(N-1)\frac{n}{N}} \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \cos(2\pi\cdot 0\cdot\frac{n}{N}) \\ \cos(2\pi\cdot 1\cdot\frac{n}{N}) \\ \vdots \\ \cos(2\pi(N-1)\frac{n}{N}) \end{bmatrix} + i\frac{1}{N}\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2\pi\cdot 0\cdot\frac{n}{N}) \\ \operatorname{sen}(2\pi\cdot 1\cdot\frac{n}{N}) \\ \vdots \\ \operatorname{sen}(2\pi(N-1)\frac{n}{N}) \end{bmatrix}$$

para $n = 0, \ldots, N-1$. Em particular, no exemplo anterior,

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{8}\left(4 + 4\left(\cos(2\pi k\frac{4}{8}) + i\operatorname{sen}(2\pi k\frac{4}{8})\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(k\pi) + \frac{i}{2}\operatorname{sen}(k\pi) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(k\pi) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$f = \begin{bmatrix} \frac12\\ \frac12\\ \frac12\\ \frac12\\ \frac12\\ \frac12\\ \frac12\\ \frac12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac12\\ 0\\ \frac12\\ 0\\ \frac12\\ 0\\ \frac12\\ 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando que $F_{N-n} = F_{-n} = F_n^*$, e representando $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, podemos escrever o n-ésimo harmônico h^n (para $n = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1$) como

$$\begin{aligned}
h_k^n &= \frac{1}{N} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} + \frac{1}{N} F_{N-n} e^{i2\pi k \frac{N-n}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i2\pi k \frac{n}{N}} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{i2\pi k \frac{-n}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \alpha_n \left(e^{i(2\pi k \frac{n}{N} + \varphi_n)} + e^{-i(2\pi k \frac{n}{N} + \varphi_n)} \right) \\
&= \frac{2}{N} \alpha_n \cos(2\pi k \frac{n}{N} + \varphi_n).
\end{aligned}$$

As frequências utilizadas nesta decomposição são claramente

$$\left\{ \frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N} \right\}.$$

Quando $n = 0$ temos $F_0 = \sum_{k=0}^{N-1} f_k$. Para $n = \frac{N}{2}$, pode-se provar que $F_{\frac{N}{2}}$ é sempre real, e assim $\varphi_{\frac{N}{2}} = 0$ (verifique!); assim o $\frac{N}{2}$-ésimo harmônico é

$$\begin{aligned}
h_k^{\frac{N}{2}} &= \frac{1}{N} F_{\frac{N}{2}} e^{i2\pi k \frac{N/2}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} e^{i2\pi k \frac{N/2}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} e^{ik\pi} \\
&= \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} \cos(k\pi) + i \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} \operatorname{sen}(k\pi) \\
&= \frac{1}{N} \alpha_{\frac{N}{2}} \cos(k\pi).
\end{aligned}$$

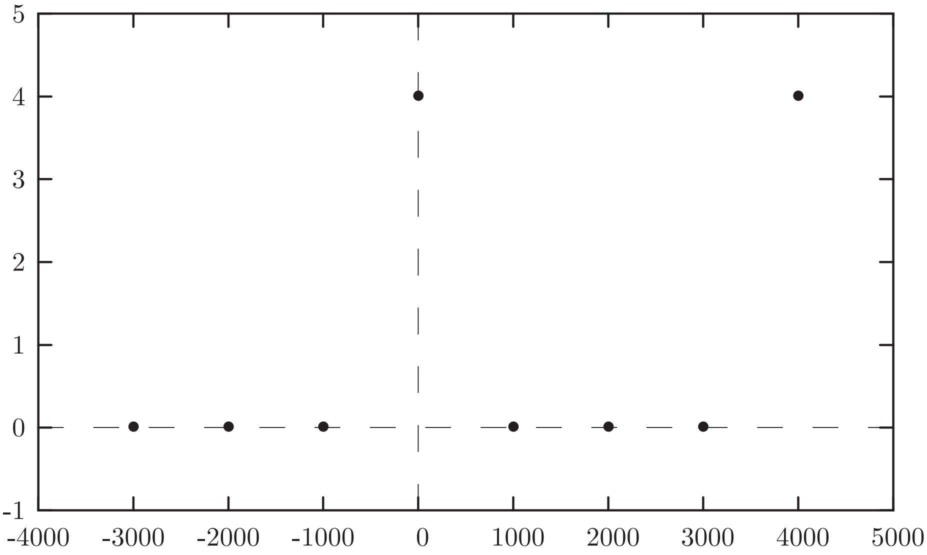
Considere agora que as N amostras correspondem a um sinal amostrado à taxa de R Hz. Então a duração de todos os vetores acima é de $\frac{N}{R}$ segundos. Em particular, todas os harmônicos utilizados na decomposição terão seus comprimentos de onda divididos por R ou, equivalentemente, suas frequências multiplicadas por R. Isso mostra que neste contexto as frequências da análise são

$$\left\{ \frac{0}{N}, \frac{R}{N}, \ldots, \frac{(N-1)R}{N} \right\};$$

outro modo de verificar isto é considerar que se f_k corresponde ao valor da função $f(t)$ no instante $t = \frac{k}{R}$ então pela equação de síntese

$$f\left(\frac{k}{R}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi\left(\frac{nR}{N}\right)\left(\frac{k}{R}\right)}.$$

Assim, se nosso exemplo fosse de um trecho de áudio amostrado à taxa $R = 8000$Hz, então o espectro teria uma resolução de 1000Hz e poderia ser representado como abaixo



Observando que $F_{-n} = F_n^*$, poderíamos omitir a parte negativa do espectro sem perda de informação.