BCC – MAC-315 – Programação Linear – 1ª Provinha

Data e hora de entrega: 20/3/2013 às 8:00 na sala B-5.

Nome:____ Nº USP: $\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\underset{i}{\boxed{}}\,\underset{j}{\boxed{}}$

Instruções: As provinhas devem ser feitas individualmente. Os valores de i e j na questão 1 são os dois últimos dígitos do seu número USP: substitua estes valores antes de resolver a questão. Entregue sua lista no dia 20/3/2013, imediatamente antes do início da aula.

Questão 1 Considere o poliedro canônico definido por $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \overbrace{\boxed{}}^{j+2} & 1 & 0 \\ \overbrace{\boxed{}}^{i+2} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \overbrace{\boxed{}}^{(i+1)(j+2)} \\ \overbrace{\boxed{}}^{(i+2)(j+1)} \end{bmatrix}.$$

Esta formulação corresponde a um poliedro original $P \subset \mathbb{R}^2$ nas variáveis x_1 e x_2 apenas, que foi passado para a forma canônica introduzindo duas variáveis de folga x_3 e x_4.

1. Escreva o poliedro P correspondente em $\mathbb{R}^2$ e desenhe-o, indicando as coordenadas dos pontos relevantes da figura (cruzamentos entre restrições e eixos coordenados);

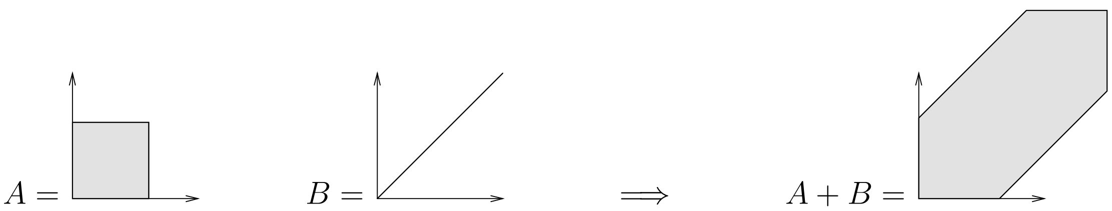
2. Resolva graficamente o problema $\left\{ \begin{array}{ll} \min & -\overbrace{\boxed{}}^{i+1} x_1 - \overbrace{\boxed{}}^{j+1} x_2 \\ \text{s.a} & x \in P \end{array} \right.$, e mostre algebricamente que a solução apresentada é ótima;

3. Prove formalmente que a solução x^* obtida no item 2 é a única solução ótima deste problema (ou seja, mostre que se y é viável e $c'y = c'x^*$, então obrigatoriamente $y = x^*$). Dica: considere os casos $A_i y < b_i$ e $A_i y = b_i$ para cada restrição.

Questão 2 Se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$, define-se a soma destes conjuntos como

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Mostre que se A e B são convexos, então $A + B$ também é convexo.



Dica: você tem que verificar a definição de convexidade adaptada ao conjunto $A + B$: ou seja, se $z, w \in A + B$ e $\lambda \in [0, 1]$, é verdade que $\lambda z + (1 - \lambda) w \in A + B$?

Observação (não é para entregar): É fácil mostrar também que se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo então o conjunto $\alpha X == \{\alpha x \mid x \in X\}$ também é convexo. Ou seja, *o conjunto de todos os conjuntos convexos em* $\mathbb{R}^n$ é fechado pelas operações aqui definidas de soma de conjuntos e multiplicação de conjunto por escalar. No entanto, este conjunto (de todos os conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$) não é um espaço vetorial; você consegue dizer o que lhe falta para isso?
