Computação Musical - Áudio Digital

slides do curso MAC0337/5900 – Computação Musical,
baseados no capítulo 2 do livro de F. Richard Moore
Elements of Computer Music

Marcelo Queiroz

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Versão de 03/04/2013

Conteúdo

- Representações sonoras
- Digitalização de som
- Mensuração do espectro
- Filtros digitais

Objetivos das representações sonoras

- Fidelidade da representação (não perder ou deturpar informação na codificação).

Objetivos das representações sonoras

- Fidelidade da representação (não perder ou deturpar informação na codificação).
- Fornecer perspectivas diversas sobre a informação (que facilitem por exemplo a reprodução, manipulação e análise).

Objetivos das representações sonoras

- Fidelidade da representação (não perder ou deturpar informação na codificação).
- Fornecer perspectivas diversas sobre a informação (que facilitem por exemplo a reprodução, manipulação e análise).
- Equivalência entre representações (exemplo mapa x instruções).

Objetivos das representações sonoras

- Fidelidade da representação (não perder ou deturpar informação na codificação).
- Fornecer perspectivas diversas sobre a informação (que facilitem por exemplo a reprodução, manipulação e análise).
- Equivalência entre representações (exemplo mapa x instruções).
- Nosso escopo: sinais de áudio analógicos, sinais digitais de áudio e espectros sonoros.

Transformações entre representações de áudio

- Registro sonoro: amostragem de um campo sonoro 3D em um ponto do captação.

Transformações entre representações de áudio

- Registro sonoro: amostragem de um campo sonoro 3D em um ponto do captação.
- ADC: conversão analógico -> digital.

Transformações entre representações de áudio

- Registro sonoro: amostragem de um campo sonoro 3D em um ponto do captação.
- ADC: conversão analógico -> digital.
- DAC: conversão digital -> analógica.

Transformações entre representações de áudio

- Registro sonoro: amostragem de um campo sonoro 3D em um ponto do captação.
- ADC: conversão analógico -> digital.
- DAC: conversão digital -> analógica.
- FT ou transformada de Fourier: conversão da representação entre os domínios temporal e espectral.

Transformações entre representações de áudio

- Registro sonoro: amostragem de um campo sonoro 3D em um ponto do captação.
- ADC: conversão analógico -> digital.
- DAC: conversão digital -> analógica.
- FT ou transformada de Fourier: conversão da representação entre os domínios temporal e espectral.
- Existem várias "transformadas de Fourier": séries de Fourier, CFT, DFT, DTFT, STFT...

Transdutores

- Propósito: converter energia ou informação de uma forma para outra.

Transdutores

- Propósito: converter energia ou informação de uma forma para outra.
- Ouvido: converte variações da pressão atmosférica em impulsos nervosos.

Transdutores

- Propósito: converter energia ou informação de uma forma para outra.
- Ouvido: converte variações da pressão atmosférica em impulsos nervosos.
- Microfone: converte pressão sonora em sinais elétricos contínuos.

Transdutores

- Propósito: converter energia ou informação de uma forma para outra.
- Ouvido: converte variações da pressão atmosférica em impulsos nervosos.
- Microfone: converte pressão sonora em sinais elétricos contínuos.
- Alto-falante: converte sinais elétricos em energia mecânica (movimento da membrana) e consequentemente em variações da pressão do ar.

Acurácia da transdução

- todo componente eletrônico (e mesmo o ouvido humano) possui respostas diferenciadas nas diversas faixas de frequência (a chamada resposta em frequência)

Acurácia da transdução

- todo componente eletrônico (e mesmo o ouvido humano) possui respostas diferenciadas nas diversas faixas de frequência (a chamada resposta em frequência)
- No caso do ouvido humano já observamos as distorções de natureza psico-acústica (curvas de phons, sones, mels, etc.).

Acurácia da transdução

- todo componente eletrônico (e mesmo o ouvido humano) possui respostas diferenciadas nas diversas faixas de frequência (a chamada resposta em frequência)
- No caso do ouvido humano já observamos as distorções de natureza psico-acústica (curvas de phons, sones, mels, etc.).
- Microfones possuem um pequeno diafragma que responde a uma faixa de frequências específica, e mesmo dentro dessa faixa podem introduzir distorções de amplitude e fase.

Acurácia da transdução

- todo componente eletrônico (e mesmo o ouvido humano) possui respostas diferenciadas nas diversas faixas de frequência (a chamada resposta em frequência)
- No caso do ouvido humano já observamos as distorções de natureza psico-acústica (curvas de phons, sones, mels, etc.).
- Microfones possuem um pequeno diafragma que responde a uma faixa de frequências específica, e mesmo dentro dessa faixa podem introduzir distorções de amplitude e fase.
- Alto-falantes possuem membranas muito maiores do que microfones, e essas membranas não têm flexibilidade para reproduzir grandes faixas de frequência.

Acurácia da transdução

- todo componente eletrônico (e mesmo o ouvido humano) possui respostas diferenciadas nas diversas faixas de frequência (a chamada resposta em frequência)
- No caso do ouvido humano já observamos as distorções de natureza psico-acústica (curvas de phons, sones, mels, etc.).
- Microfones possuem um pequeno diafragma que responde a uma faixa de frequências específica, e mesmo dentro dessa faixa podem introduzir distorções de amplitude e fase.
- Alto-falantes possuem membranas muito maiores do que microfones, e essas membranas não têm flexibilidade para reproduzir grandes faixas de frequência.
- *Alto-falantes* específicos: *subwoofer, woofer, mid-range*

Sinais analógicos

- Seja $p(t)$ a variação de pressão no ar e considere um transdutor pressão–>voltagem. Idealmente:

$$v(t) \propto p(t)$$

Na prática $v(t) \propto D[p(t)] + r(t)$ (D=distorção, r=ruído).

Sinais analógicos

- Seja $p(t)$ a variação de pressão no ar e considere um transdutor pressão–>voltagem. Idealmente:

$$v(t) \propto p(t)$$

  Na prática $v(t) \propto D\left[p(t)\right] + r(t)$ (D=distorção, r=ruído).
- Distorção+ruído lineares são fáceis de eliminar. Tipicamente estes efeitos são não-lineares.

Sinais analógicos

- Seja $p(t)$ a variação de pressão no ar e considere um transdutor pressão–>voltagem. Idealmente:

  $$v(t) \propto p(t)$$

  Na prática $v(t) \propto D\left[p(t)\right] + r(t)$ (D=distorção, r=ruído).
- Distorção+ruído lineares são fáceis de eliminar. Tipicamente estes efeitos são não-lineares.
- Um dos efeitos do ruído é limitar a faixa dinâmica de operação dos transdutores.

Formas de onda analógicas

- Funções periódicas:

$$f(t+\tau) = f(t), \ \forall t.$$

o menor valor de τ que verifica esta equação é chamado de *período* da função.

Formas de onda analógicas

- Funções periódicas:

$$f(t+\tau) = f(t), \ \forall t.$$

  o menor valor de τ que verifica esta equação é chamado de *período* da função.

- Não existem sons musicais periódicos (assim como não existe música que dure toda a eternidade).

Formas de onda analógicas

- Funções periódicas:

$$f(t+\tau) = f(t), \ \forall t.$$

  o menor valor de τ que verifica esta equação é chamado de *período* da função.
- Não existem sons musicais periódicos (assim como não existe música que dure toda a eternidade).
- Ainda assim, o conceito é muito útil, pois o período de um recorte sonoro (pensando nele repetido ciclicamente) está relacionado à *frequência* e ao conceito de *altura musical*.

Representação de sinais periódicos

- Sinais senoidais (ω=frequência angular, f_0=frequência em Hz):

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$x(t) = \alpha \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = 2\pi f_0 \Leftrightarrow f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$$

Representação de sinais periódicos

- Sinais senoidais (ω=frequência angular, f_0=frequência em Hz):

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$x(t) = \alpha \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = 2\pi f_0 \Leftrightarrow f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$$

- Somas de senoides:

$$y(t) = \sum_k \alpha_k \cos(2\pi f_k + \varphi_k)$$

Representação de sinais periódicos

- Sinais senoidais (ω=frequência angular, f_0=frequência em Hz):

$$x(t) = \alpha\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$x(t) = \alpha\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = 2\pi f_0 \Leftrightarrow f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$$

- Somas de senoides:

$$y(t) = \sum_k \alpha_k \cos(2\pi f_k + \varphi_k)$$

- Outras formas de onda:

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [k, k+1),\ k \text{ par} \\ -1 & t \in [k, k+1),\ k \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$s(2k+t) = t,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in [-1, 1]$$

Ruído: Definições e dificuldades

- Em teoria da informação (também em DSP) ruído é qualquer sinal indesejado adicionado à informação desejada.

Ruído: Definições e dificuldades

- Em teoria da informação (também em DSP) ruído é qualquer sinal indesejado adicionado à informação desejada.
- Em música, ruído é uma categoria sem fronteiras claramente definidas, que abrange uma infinidade de sons.

Ruído: Definições e dificuldades

- Em teoria da informação (também em DSP) ruído é qualquer sinal indesejado adicionado à informação desejada.
- Em música, ruído é uma categoria sem fronteiras claramente definidas, que abrange uma infinidade de sons.
- Geralmente, ruídos não possuem altura musical definida; porém, alguns sons sem altura musical definida (gongos, sinos, etc.) não são necessariamente denominados ruídos.

Ruído: Definições e dificuldades

- Em teoria da informação (também em DSP) ruído é qualquer sinal indesejado adicionado à informação desejada.
- Em música, ruído é uma categoria sem fronteiras claramente definidas, que abrange uma infinidade de sons.
- Geralmente, ruídos não possuem altura musical definida; porém, alguns sons sem altura musical definida (gongos, sinos, etc.) não são necessariamente denominados ruídos.
- Ruídos musicais costumam não ser periódicos ou quase-periódicos (mas existem exceções: sons de máquinas, veículos, apitos, etc.).

Caracterização de ruídos

- Caracterizações espectrais: ruídos de banda-larga, banda-estreita, branco, etc..

Caracterização de ruídos

- Caracterizações espectrais: ruídos de banda-larga, banda-estreita, branco, etc..
- Ruído branco: possui energia constante em todas as faixas de frequência.

Caracterização de ruídos

- Caracterizações espectrais: ruídos de banda-larga, banda-estreita, branco, etc..
- Ruído branco: possui energia constante em todas as faixas de frequência.
- Outras cores de ruído:
  rosa (energia constante por oitava, espectro $\frac{1}{f}$),
  vermelho (Browniano ou $\frac{1}{f^2}$),
  cinza (nível perceptual constante de acordo com uma curva como dBA ou ISO 226)

Medidas de amplitude

- Amplitude de pico:

$$A_p(x, I) = \max\{x(t) \mid t \in I\}$$

Medidas de amplitude

- Amplitude de pico:

$$A_p(x, I) = \max\{x(t) \mid t \in I\}$$

- Amplitude média:

$$A_m(x, I) = \frac{\int_I |x(t)| dt}{|I|}$$

Medidas de amplitude

- Amplitude de pico:

$$A_p(x, I) = \max\{x(t) \mid t \in I\}$$

- Amplitude média:

$$A_m(x, I) = \frac{\int_I |x(t)|dt}{|I|}$$

- Amplitude RMS (Root-Mean-Square):

$$A_{rms}(x, I) = \sqrt{\frac{\int_I x(t)^2 dt}{|I|}}$$

Medidas de amplitude

Exemplos:

- senoide $(A_p = 1, A_m = \frac{2}{\pi} \approx 0.637, A_{rms} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707)$

Medidas de amplitude

Exemplos:

- senoide ($A_p = 1, A_m = \frac{2}{\pi} \approx 0.637, A_{rms} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$)
- quadrada ($A_p = A_m = A_{rms} = 1$)

Medidas de amplitude

Exemplos:

- senoide ($A_p = 1, A_m = \frac{2}{\pi} \approx 0.637, A_{rms} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$)
- quadrada ($A_p = A_m = A_{rms} = 1$)
- dente-de-serra ($A_p = 1, A_m = \frac{1}{2}, A_{rms} = \frac{1}{3}$)

Medidas de amplitude

Exemplos:

- senoide ($A_p = 1, A_m = \frac{2}{\pi} \approx 0.637, A_{rms} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$)
- quadrada ($A_p = A_m = A_{rms} = 1$)
- dente-de-serra ($A_p = 1, A_m = \frac{1}{2}, A_{rms} = \frac{1}{3}$)
- 110 V AC possui pico de $\frac{110}{0.707} \approx 155.56$ V (equivalente DC).

Medidas de amplitude

Como calcular?

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta computacional:

```
octave> N=10000;
octave> x=sin(linspace(0,2*pi,N));
```

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta computacional:

```
octave> N=10000;
octave> x=sin(linspace(0,2*pi,N));
octave> A_p = max(x)
A_p = 1.00000
```

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta computacional:

```
octave> N=10000;
octave> x=sin(linspace(0,2*pi,N));
octave> A_p = max(x)
A_p = 1.00000
octave> A_m = sum(abs(x))/N
A_m = 0.63656
```

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta computacional:

```
octave> N=10000;
octave> x=sin(linspace(0,2*pi,N));
octave> A_p = max(x)
A_p = 1.00000
octave> A_m = sum(abs(x))/N
A_m = 0.63656
octave> A_rms = sqrt(sum(x.*x)/N)
A_rms = 0.70707
```

Medidas de amplitude

Como calcular?

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta matemática:

$$A_m = \frac{\int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(t)|dt}{\pi}$$

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta matemática:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\int_0^\pi |\operatorname{sen}(t)| dt}{\pi} \\ &= \frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t) dt}{\pi} \end{aligned}$$

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta
matemática:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\int_0^\pi |\operatorname{sen}(t)| dt}{\pi} \\ &= \frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t) dt}{\pi} \\ &= \frac{[-\cos(t)]_0^\pi}{\pi} \end{aligned}$$

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta
matemática:

$$
\begin{aligned}
A_m &= \frac{\int_0^\pi |\operatorname{sen}(t)| dt}{\pi} \\
&= \frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t) dt}{\pi} \\
&= \frac{[-\cos(t)]_0^\pi}{\pi} \\
&= \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi}
\end{aligned}
$$

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta
matemática:

$$
\begin{aligned}
A_m &= \frac{\int_0^\pi |\operatorname{sen}(t)| dt}{\pi} \\
&= \frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t) dt}{\pi} \\
&= \frac{[-\cos(t)]_0^\pi}{\pi} \\
&= \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \approx 0.637
\end{aligned}
$$

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta matemática:

$$A_m = \frac{\int_0^\pi |\operatorname{sen}(t)| dt}{\pi} = \frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t) dt}{\pi} = \frac{[-\cos(t)]_0^\pi}{\pi} = \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$$

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)^2 dt}{\pi}}$$

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta matemática:

$$A_m = \frac{\int_0^\pi |\operatorname{sen}(t)|dt}{\pi} = \frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)dt}{\pi} = \frac{[-\cos(t)]_0^\pi}{\pi} = \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$$

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)^2 dt}{\pi}}$$

Mas $\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)^2 dt \quad = \int_0^\pi (1 - \cos(t)^2) dt$

Medidas de amplitude

Como calcular?
Resposta matemática:

$$
\begin{aligned}
A_m &= \frac{\int_0^\pi |\operatorname{sen}(t)| dt}{\pi} \\
&= \frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t) dt}{\pi} \\
&= \frac{[-\cos(t)]_0^\pi}{\pi} \\
&= \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \approx 0.637
\end{aligned}
$$

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)^2 dt}{\pi}}$$

$$
\text{Mas } \int_0^\pi \operatorname{sen}(t)^2 dt = \int_0^\pi (1 - \cos(t)^2) dt = \int_0^\pi 1 dt - \int_0^\pi \cos(t)^2 dt
$$

Medidas de amplitude

Como calcular? Resposta matemática:

$$
\begin{aligned}
A_m &= \frac{\int_0^\pi |\mathrm{sen}(t)|dt}{\pi} \\
&= \frac{\int_0^\pi \mathrm{sen}(t)dt}{\pi} \\
&= \frac{[-\cos(t)]_0^\pi}{\pi} \\
&= \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \approx 0.637
\end{aligned}
$$

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^\pi \mathrm{sen}(t)^2 dt}{\pi}}$$

Mas $\int_0^\pi \mathrm{sen}(t)^2 dt$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\pi (1-\cos(t)^2)dt \\
&= \int_0^\pi 1dt - \int_0^\pi \cos(t)^2 dt \\
&= \pi - \int_0^\pi \mathrm{sen}(t)^2 dt
\end{aligned}
$$

Medidas de amplitude

Como calcular? Resposta matemática:

$$
\begin{aligned}
A_m &= \frac{\int_0^\pi |\operatorname{sen}(t)|dt}{\pi} \\
&= \frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)dt}{\pi} \\
&= \frac{[-\cos(t)]_0^\pi}{\pi} \\
&= \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \approx 0.637
\end{aligned}
$$

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)^2 dt}{\pi}}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Mas} \quad \int_0^\pi \operatorname{sen}(t)^2 dt &= \int_0^\pi (1-\cos(t)^2)dt \\
&= \int_0^\pi 1dt - \int_0^\pi \cos(t)^2 dt \\
&= \pi - \int_0^\pi \operatorname{sen}(t)^2 dt \\
\text{Logo} \quad \int_0^\pi \operatorname{sen}(t)^2 dt &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Medidas de amplitude

Como calcular? Resposta matemática:

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^\pi \mathrm{sen}(t)^2 dt}{\pi}}$$

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\int_0^\pi |\mathrm{sen}(t)| dt}{\pi} \\ &= \frac{\int_0^\pi \mathrm{sen}(t) dt}{\pi} \\ &= \frac{[-\cos(t)]_0^\pi}{\pi} \\ &= \frac{-\cos(\pi)+\cos(0)}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \approx 0.637 \end{aligned}$$

Mas $\int_0^\pi \mathrm{sen}(t)^2 dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi (1-\cos(t)^2) dt \\ &= \int_0^\pi 1 dt - \int_0^\pi \cos(t)^2 dt \\ &= \pi - \int_0^\pi \mathrm{sen}(t)^2 dt \end{aligned}$$

Logo $\int_0^\pi \mathrm{sen}(t)^2 dt = \frac{\pi}{2}$

e portanto A_{rms}

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\int_0^\pi \mathrm{sen}(t)^2 dt}{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi/2}{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \end{aligned}$$

Relação sinal ruído (SNR)

- A relação sinal-ruído de um sistema é definida como

$$SNR = \frac{\text{máxima amplitude representável}}{\text{amplitude RMS do ruído}}$$

Relação sinal ruído (SNR)

- A relação sinal-ruído de um sistema é definida como

$$SNR = \frac{\text{máxima amplitude representável}}{\text{amplitude RMS do ruído}}$$

- A mesma medida em dB:

$$SNR = 20 \log \frac{\text{máxima amplitude representável}}{\text{amplitude RMS do ruído}}$$

Relação sinal ruído (SNR)

- A relação sinal-ruído de um sistema é definida como
$$SNR = \frac{\text{máxima amplitude representável}}{\text{amplitude RMS do ruído}}$$
- A mesma medida em dB:
$$SNR = 20 \log \frac{\text{máxima amplitude representável}}{\text{amplitude RMS do ruído}}$$
- Observação: dB é normalmente medido em intensidade/energia; como energia $\propto$ amplitude^2,

$$dB_E = 10 \log \frac{E}{E_0} = 10 \log \frac{A^2}{A_0^2} = 10 \log \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 = 20 \log \frac{A}{A_0} = dB_A.$$

Tipos de distorção

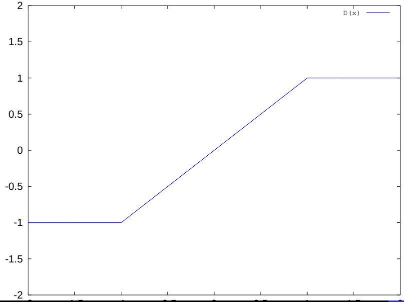
- Distorção em frequência: dispositivos reais são caracterizados por curvas de resposta que não são perfeitamente planas, e que apresentam quedas abruptas de resposta nas extremidades da faixa de frequência de operação.

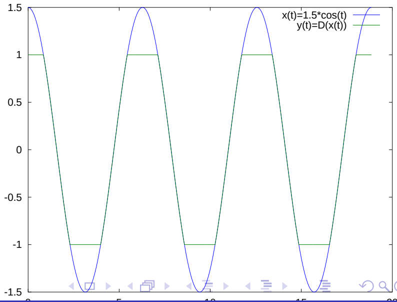
Tipos de distorção

- Distorção em frequência: dispositivos reais são caracterizados por curvas de resposta que não são perfeitamente planas, e que apresentam quedas abruptas de resposta nas extremidades da faixa de frequência de operação.
- Distorção de amplitude: é caracterizada por não-linearidades na relação entre entrada e saída. Por exemplo, se a entrada varia numa faixa de valores maior do que o dispositivo consegue mapear, o sinal fica "*clippado*".

Exemplo de distorção de amplitude

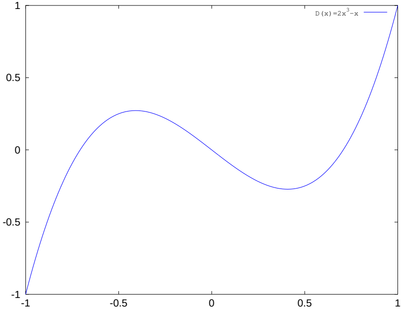
$$\text{Exemplo: } D(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 1 \\ x & \text{se } x \in [-1, 1] \\ -1 & \text{se } x < -1 \end{cases} \quad \text{e } x(t) = 1.5\cos(t).$$

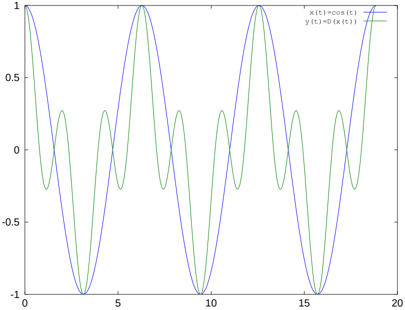




Exemplo de distorção de amplitude

Exemplo: $D(x) = 2x^3 - x$.





Tipos de distorção

- Distorção de fase: é caracterizado por diferenças de atraso entre frequências diferentes.

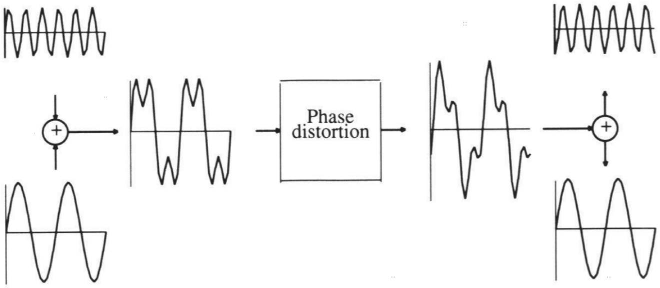
Tipos de distorção

- Distorção de fase: é caracterizado por diferenças de atraso entre frequências diferentes.
- Exemplo: num alto-falante com 3 *drivers* (graves, médios e agudos), as pequenas diferenças de posicionamento dos falantes já introduzirá diferenças de atraso na chegada do som ao ouvinte.

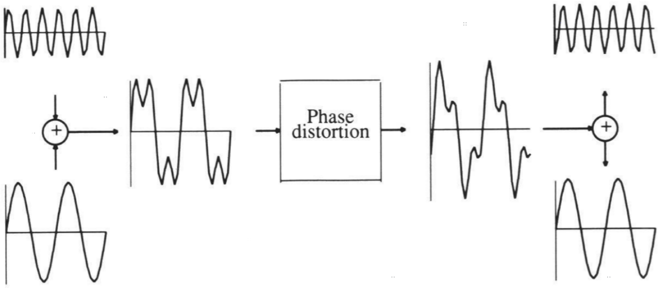
Tipos de distorção

- Distorção de fase: é caracterizado por diferenças de atraso entre frequências diferentes.
- Exemplo: num alto-falante com 3 *drivers* (graves, médios e agudos), as pequenas diferenças de posicionamento dos falantes já introduzirá diferenças de atraso na chegada do som ao ouvinte.
- Em 10000 Hz, o comprimento de onda é de 3.44 cm (8.6 mm de diferença dos caminhos já resulta em 90° de desvio de fase) Em 1000 Hz, o comprimento de onda é de 34.4 cm (8.6 cm de diferença dos caminhos já resulta em 90° de desvio de fase)

Exemplo de distorção de fase



Exemplo de distorção de fase



- Exemplo em Pd

Percepção da distorção

- Em termos perceptuais, considera-se que em tons quasi-periódicos

  distorção de fase $\ll$ distorção em frequência $\ll$ distorção de amplitude

  onde $\ll$ deve ser lido como "é menos pior que".

Percepção da distorção

- Em termos perceptuais, considera-se que em tons quasi-periódicos

  distorção de fase $\ll$ distorção em frequência $\ll$ distorção de amplitude

  onde $\ll$ deve ser lido como "é menos pior que".
- A forma de onda não ajuda muito a entender estas diferenças: formas muito diferentes podem soar quase iguais, e formas muito parecidas podem soar bastante diferentes.

Percepção da distorção

- Em termos perceptuais, considera-se que em tons quasi-periódicos

  distorção de fase $\ll$ distorção em frequência $\ll$ distorção de amplitude

  onde $\ll$ deve ser lido como "é menos pior que".
- A forma de onda não ajuda muito a entender estas diferenças: formas muito diferentes podem soar quase iguais, e formas muito parecidas podem soar bastante diferentes.
- A distorção de fase pode ser muito perceptível em sons transientes (ataques ruidosos, consoantes).

Percepção da distorção

- Em termos perceptuais, considera-se que em tons quasi-periódicos

  distorção de fase $\ll$ distorção em frequência $\ll$ distorção de amplitude

  onde $\ll$ deve ser lido como "é menos pior que".
- A forma de onda não ajuda muito a entender estas diferenças: formas muito diferentes podem soar quase iguais, e formas muito parecidas podem soar bastante diferentes.
- A distorção de fase pode ser muito perceptível em sons transientes (ataques ruidosos, consoantes).
- Ruído de banda-larga (mesmo com intensidade razoável), pode ser menos perceptível que ruído de banda-estreita (mesmo com intensidade bem mais baixa).

Gravação

- Objetivos: transmissão no tempo e espaço.

Gravação

- Objetivos: transmissão no tempo e espaço.
- Registro magnético: um eletromagneto converte um sinal elétrico analógico em um campo magnético variável que redistribui as partículas de um material sensível ao campo magnético (por exemplo óxido de ferro).

Gravação

- Objetivos: transmissão no tempo e espaço.
- Registro magnético: um eletromagneto converte um sinal elétrico analógico em um campo magnético variável que redistribui as partículas de um material sensível ao campo magnético (por exemplo óxido de ferro).
- Dificuldades: sensibilidade a campos magnéticos externos, ao magnetismo das outras camadas de fita que são enroladas (*print-through*), à distribuição desigual de material (causando *drop-outs*), etc.

Gravação

- Sistemas de redução de ruído funcionam através da pré-ênfase de regiões mais afetadas pelo ruído *tape hiss*; no *playback*, as mesmas regiões são correspondentemente atenuadas.

Gravação

- Sistemas de redução de ruído funcionam através da pré-ênfase de regiões mais afetadas pelo ruído *tape hiss*; no *playback*, as mesmas regiões são correspondentemente atenuadas.
- Entender as características do registro e transmissão analógicas são fundamentais para a construção de conversores entre as representações analógica e digital (esta última essencial para a computação musical).

Digitalização: Sistemas ADC e DAC

- Representação digital: sequências de amostras $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ associadas a instantes equi-espaçados.

Digitalização: Sistemas ADC e DAC

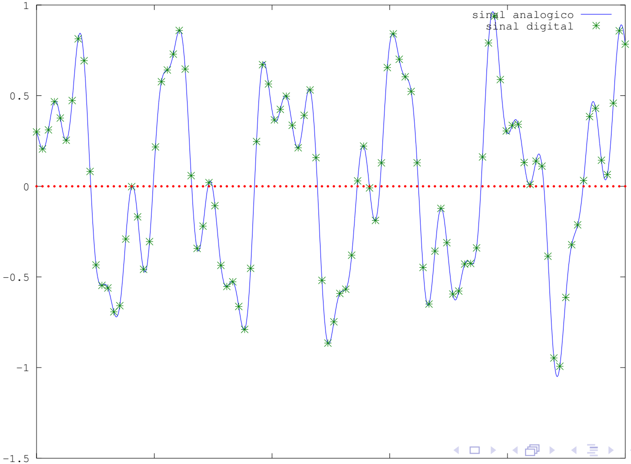
- Representação digital: sequências de amostras $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ associadas a instantes equi-espaçados.
- Formato mais comum: PCM = Pulse Code Modulation, onde cada x_n consiste em um vetor de bits representando o valor instantâneo de uma amostra.

Digitalização: Sistemas ADC e DAC

- Representação digital: sequências de amostras $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ associadas a instantes equi-espaçados.
- Formato mais comum: PCM = Pulse Code Modulation, onde cada x_n consiste em um vetor de bits representando o valor instantâneo de uma amostra.
- PCM é caracterizado principalmente pela *taxa de amostragem* (número de amostras por segundo, em Hz) e pelo *formato da amostra* (número de bits e tipo de codificação).

Digitalização: Sistemas ADC e DAC

- Representação digital: sequências de amostras $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ associadas a instantes equi-espaçados.
- Formato mais comum: PCM = Pulse Code Modulation, onde cada x_n consiste em um vetor de bits representando o valor instantâneo de uma amostra.
- PCM é caracterizado principalmente pela *taxa de amostragem* (número de amostras por segundo, em Hz) e pelo *formato da amostra* (número de bits e tipo de codificação).
- Alternativas: DPCM, PAM, PWM, DM, ADPCM, etc.


1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
sinal analogico
sinal digital

Limitações da Representação Digital

- **Teorema da amostragem (Shannon-Nyquist):** para representar digitalmente sem perdas um sinal analógico contendo frequências estritamente menores do que X Hz é suficiente tomar pelo menos 2X amostras por segundo. Mais ainda, para se representar corretamente todas as senoides no intervalo $[0, X]$ Hz é necessário tomar pelo menos 2X amostras por segundo.

Limitações da Representação Digital

- **Teorema da amostragem (Shannon-Nyquist):** para representar digitalmente sem perdas um sinal analógico contendo frequências estritamente menores do que X Hz é suficiente tomar pelo menos 2X amostras por segundo. Mais ainda, para se representar corretamente todas as senoides no intervalo $[0, X]$ Hz é necessário tomar pelo menos 2X amostras por segundo.
- Intuição: uma senoide com frequência X HZ precisa de pelo menos 2 amostras (+1 e -1) para representar cada ciclo.

Limitações da Representação Digital

Limitações da Representação Digital

- Necessidade do teorema: fácil de ver através do fenômeno de rebatimento (*aliasing*, seções 2.2.3 e 2.2.4).

Limitações da Representação Digital

- Necessidade do teorema: fácil de ver através do fenômeno de rebatimento (*aliasing*, seções 2.2.3 e 2.2.4).
- Suficiência do teorema: não é trivial (inversibilidade da DTFT).

Limitações da Representação Digital

- Necessidade do teorema: fácil de ver através do fenômeno de rebatimento (*aliasing*, seções 2.2.3 e 2.2.4).
- Suficiência do teorema: não é trivial (inversibilidade da DTFT).
- Se R Hz é a taxa de amostragem, então a frequência limite de representação R/2 Hz é chamada de *frequência de Nyquist*.

Conversão Analógico-Digital (R Hz, N bits)

- Primeiro passo: remover frequências acima de Nyquist (R/2 Hz).

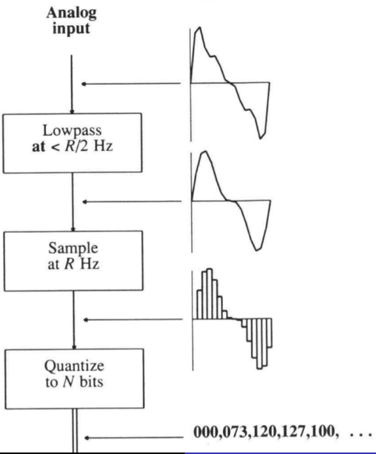
Conversão Analógico-Digital (R Hz, N bits)

- Primeiro passo: remover frequências acima de Nyquist (R/2 Hz).
- Segundo passo: colher amostras a cada 1/R segundos.

Conversão Analógico-Digital (R Hz, N bits)

- Primeiro passo: remover frequências acima de Nyquist (R/2 Hz).
- Segundo passo: colher amostras a cada 1/R segundos.
- Terceiro passo: Quantizar cada amostra usando N bits (seção 2.2.5).

Conversão Analógico-Digital (R Hz, N bits)



Conversão Digital-Analógica

- Primeiro passo: construir um sinal analógico "escalonado" (módulo DAC: chave $k \propto 2^k$).

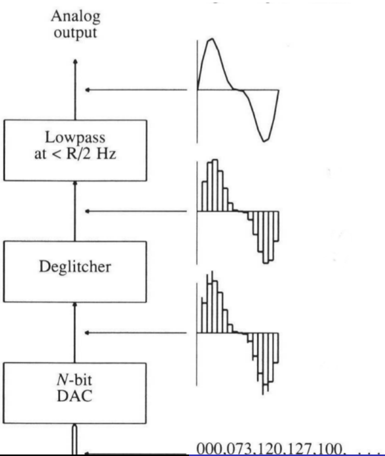
Conversão Digital-Analógica

- Primeiro passo: construir um sinal analógico "escalonado" (módulo DAC: chave $k \propto 2^k$).
- Segundo passo: eliminar transientes (*deglitcher: sample-and-hold*).

Conversão Digital-Analógica

- Primeiro passo: construir um sinal analógico "escalonado" (módulo DAC: chave $k \propto 2^k$).
- Segundo passo: eliminar transientes (*deglitcher: sample-and-hold*).
- Terceiro passo: remover frequências acima de Nyquist (filtro passa-baixa em R/2 Hz).

Conversão Digital-Analógica



Aliasing ou Rebatimento

- *Aliasing* é um fenômeno que ocorre quando tentamos representar um sinal que não é representável com a taxa de amostragem usada.

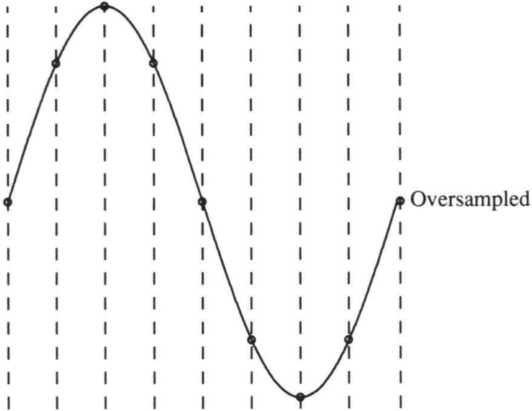
Aliasing ou Rebatimento

- *Aliasing* é um fenômeno que ocorre quando tentamos representar um sinal que não é representável com a taxa de amostragem usada.
- Uma componente senoidal é considerada *super-amostrada* se é representada por mais de 2 amostras por ciclo, *criticamente amostrada* se é representada por exatamente 2 amostras por ciclo (frequência de Nyquist) e *sub-amostrada* se é representada por menos de 2 amostras por ciclo.

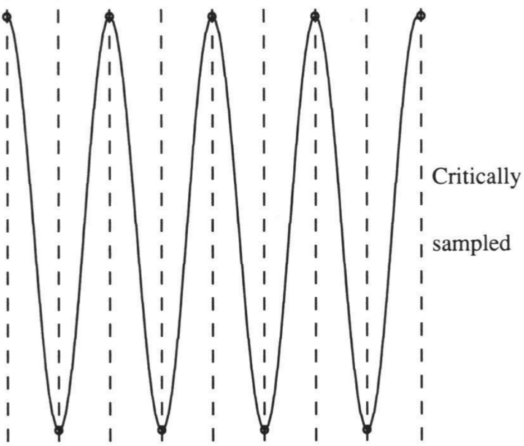
Aliasing ou Rebatimento

- *Aliasing* é um fenômeno que ocorre quando tentamos representar um sinal que não é representável com a taxa de amostragem usada.
- Uma componente senoidal é considerada *super-amostrada* se é representada por mais de 2 amostras por ciclo, *criticamente amostrada* se é representada por exatamente 2 amostras por ciclo (frequência de Nyquist) e *sub-amostrada* se é representada por menos de 2 amostras por ciclo.
- Senoides sub-amostradas serão erroneamente interpretadas como possuindo frequência mais baixa.

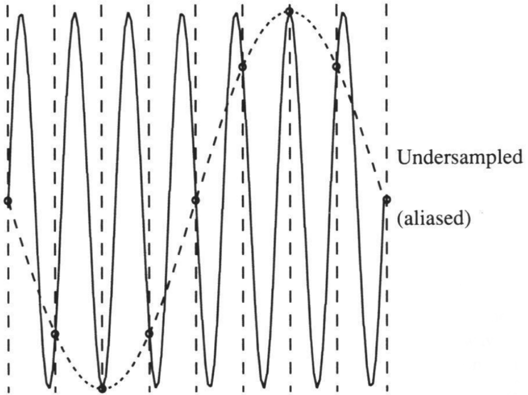
Senoide super-amostrada



Senoide criticamente amostrada



Senoide sub-amostrada (rebatida)



Rebatimento (ponto de vista algébrico)

- Uma senoide digitalizada é uma função de tempo discreto

$$x[n] = \alpha \cos\left(2\pi f \frac{n}{R} + \varphi_0\right).$$

Rebatimento (ponto de vista algébrico)

- Uma senoide digitalizada é uma função de tempo discreto

$$x[n] = \alpha \cos\left(2\pi f \frac{n}{R} + \varphi_0\right).$$

- Se $f = f_0 + kR$ $(k \in \mathbb{Z})$, então $\forall n \in \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned} x[n] &= \alpha \cos\left(2\pi f \tfrac{n}{R} + \varphi_0\right) \\ &= \alpha \cos\left(2\pi (f_0 + kR) \tfrac{n}{R} + \varphi_0\right) \\ &= \alpha \cos\left(2\pi f_0 \tfrac{n}{R} + 2\pi kn + \varphi_0\right) \\ &= \alpha \cos\left(2\pi f_0 \tfrac{n}{R} + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

Rebatimento (ponto de vista algébrico)

- Uma senoide digitalizada é uma função de tempo discreto

$$x[n] = \alpha \cos\left(2\pi f \frac{n}{R} + \varphi_0\right).$$

- Se $f = f_0 + kR$ ($k \in \mathbb{Z}$), então $\forall n \in \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned} x[n] &= \alpha \cos\left(2\pi f \tfrac{n}{R} + \varphi_0\right) \\ &= \alpha \cos\left(2\pi (f_0 + kR) \tfrac{n}{R} + \varphi_0\right) \\ &= \alpha \cos\left(2\pi f_0 \tfrac{n}{R} + 2\pi kn + \varphi_0\right) \\ &= \alpha \cos\left(2\pi f_0 \tfrac{n}{R} + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

- Todas as frequências $\{f = f_0 + kR \mid k \in \mathbb{Z}\}$ pertencem a uma mesma *classe de equivalência*, cujo representante natural

Rebatimento (ponto de vista perceptual)

- Senoides com frequência acima de Nyquist simplesmente soam com a frequência rebatida de acordo com a expressão $f_r = f - \text{round}\left(\frac{f}{R}\right) R$.

Rebatimento (ponto de vista perceptual)

- Senoides com frequência acima de Nyquist simplesmente soam com a frequência rebatida de acordo com a expressão $f_r = f - \text{round}\left(\frac{f}{R}\right) R$.
- Exemplos de rebatimento em Pd (senoides).

Rebatimento (ponto de vista perceptual)

- Senoides com frequência acima de Nyquist simplesmente soam com a frequência rebatida de acordo com a expressão $f_r = f - \text{round}\left(\frac{f}{R}\right) R$.
- Exemplos de rebatimento em Pd (senoides).
- Algoritmos de síntese e processamento podem produzir componentes acima de Nyquist, com distorções especificamente associadas ao rebatimento.

Exemplo de rebatimento: onda quadrada

- Podemos sintetizar uma onda quadrada perfeita pela expressão

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [k, k+1), \;\; k \text{ par} \\ -1 & t \in [k, k+1), \;\; k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Exemplo de rebatimento: onda quadrada

- Podemos sintetizar uma onda quadrada perfeita pela expressão

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [k, k+1),\ \ k \text{ par} \\ -1 & t \in [k, k+1),\ \ k \text{ ímpar} \end{cases}$$

- Porém esta expressão viola a condição de limitação de banda:

Exemplo de rebatimento: onda quadrada

- Podemos sintetizar uma onda quadrada perfeita pela expressão

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [k, k+1),\ k \text{ par} \\ -1 & t \in [k, k+1),\ k \text{ ímpar} \end{cases}$$

- Porém esta expressão viola a condição de limitação de banda:

$$q(t) = \quad \mathrm{sen}(2\pi \tfrac{1}{2} t) + \tfrac{1}{3}\mathrm{sen}(2\pi \tfrac{3}{2} t) + \tfrac{1}{5}\mathrm{sen}(2\pi \tfrac{5}{2} t)$$

Exemplo de rebatimento: onda quadrada

- Podemos sintetizar uma onda quadrada perfeita pela expressão

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [k, k+1),\ \ k \text{ par} \\ -1 & t \in [k, k+1),\ \ k \text{ ímpar} \end{cases}$$

- Porém esta expressão viola a condição de limitação de banda:

$$\begin{aligned} q(t) = \quad & \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{1}{2} t) + \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{3}{2} t) + \tfrac{1}{5} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{5}{2} t) \\ & + \tfrac{1}{7} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{7}{2} t) + \tfrac{1}{9} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{9}{2} t) + \tfrac{1}{11} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{11}{2} t) \end{aligned}$$

Exemplo de rebatimento: onda quadrada

- Podemos sintetizar uma onda quadrada perfeita pela expressão

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [k, k+1),\ k \text{ par} \\ -1 & t \in [k, k+1),\ k \text{ ímpar} \end{cases}$$

- Porém esta expressão viola a condição de limitação de banda:

$$\begin{aligned} q(t) = \quad & \mathrm{sen}(2\pi \tfrac{1}{2} t) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}(2\pi \tfrac{3}{2} t) + \tfrac{1}{5}\,\mathrm{sen}(2\pi \tfrac{5}{2} t) \\ & + \tfrac{1}{7}\,\mathrm{sen}(2\pi \tfrac{7}{2} t) + \tfrac{1}{9}\,\mathrm{sen}(2\pi \tfrac{9}{2} t) + \tfrac{1}{11}\,\mathrm{sen}(2\pi \tfrac{11}{2} t) \\ & + \tfrac{1}{13}\,\mathrm{sen}(2\pi \tfrac{13}{2} t) + \tfrac{1}{15}\,\mathrm{sen}(2\pi \tfrac{15}{2} t) + \cdots \end{aligned}$$

Exemplo de rebatimento: onda quadrada

- Podemos sintetizar uma onda quadrada perfeita pela expressão

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [k, k+1),\ \ k \text{ par} \\ -1 & t \in [k, k+1),\ \ k \text{ ímpar} \end{cases}$$

- Porém esta expressão viola a condição de limitação de banda:

$$\begin{aligned} q(t) = \ & \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{1}{2} t) + \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{3}{2} t) + \tfrac{1}{5} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{5}{2} t) \\ & + \tfrac{1}{7} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{7}{2} t) + \tfrac{1}{9} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{9}{2} t) + \tfrac{1}{11} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{11}{2} t) \\ & + \tfrac{1}{13} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{13}{2} t) + \tfrac{1}{15} \operatorname{sen}(2\pi \tfrac{15}{2} t) + \cdots \end{aligned}$$

- Exemplos de rebatimento em Pd (ondas quadradas).

Exemplo de rebatimento: onda quadrada

- Na prática a onda gerada seria bem diferente:

$$y(t) = \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(2\pi\left(kf_0 - \text{round}\left(\frac{kf_0}{R}\right)R\right)t\right).$$

Exemplo de rebatimento: onda quadrada

- Na prática a onda gerada seria bem diferente:

$$y(t) = \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(2\pi\left(kf_0 - \text{round}\left(\frac{kf_0}{R}\right)R\right)t\right).$$

- A solução é usar uma aproximação da onda quadrada com limitação na faixa de frequências:

$$\tilde{q}(t) = \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(2\pi k f_0 t\right)$$

de tal modo que $kf_0 < \frac{R}{2} \Longrightarrow f_0 < \frac{R}{2f_0}$.

Exemplo de rebatimento: *overdrive*

- Sinais com infinitos harmônicos podem ser gerados tanto na síntese quanto no processamento sonoro.

Exemplo de rebatimento: *overdrive*

- Sinais com infinitos harmônicos podem ser gerados tanto na síntese quanto no processamento sonoro.
- Um exemplo muito próximo do anterior é o da distorção do tipo *overdrive*, onde a amplitude é distorcida por uma função do tipo

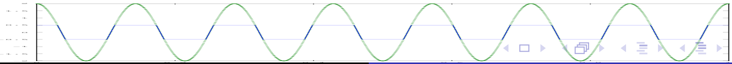
$$D(x) = \text{clip}(x, \alpha) = \min\{\alpha, \max\{-\alpha, x\}\}$$

Exemplo de rebatimento: *overdrive*

- Sinais com infinitos harmônicos podem ser gerados tanto na síntese quanto no processamento sonoro.
- Um exemplo muito próximo do anterior é o da distorção do tipo *overdrive*, onde a amplitude é distorcida por uma função do tipo

$$D(x) = \text{clip}(x, \alpha) = \min\{\alpha, \max\{-\alpha, x\}\}$$

- Quanto maior a diferença entre a amplitude de uma senoide e o valor de *clipping* α, mais parecida será a saída desse processo com uma onda quadrada (infinitos harmônicos $\Longrightarrow$ *aliasing*):



Quantização Linear (LQ)

- Objetivo: Mapear uma faixa contínua de valores de entrada $[-E, +E]$ a um conjunto finito de 2^N valores de amplitude discreta.

Quantização Linear (LQ)

- Objetivo: Mapear uma faixa contínua de valores de entrada $[-E, +E]$ a um conjunto finito de 2^N valores de amplitude discreta.
- Divisão linear: o intervalo $[-E, +E]$ é dividido em pedaços de tamanho $\frac{2E}{2^N}$ com fronteiras

$$\left[k\frac{E}{2^{N-1}}, (k+1)\frac{E}{2^{N-1}}\right], \ k = -2^{N-1}, \ldots, 2^{N-1} - 1.$$

Quantização Linear (LQ)

- Objetivo: Mapear uma faixa contínua de valores de entrada $[-E, +E]$ a um conjunto finito de 2^N valores de amplitude discreta.
- Divisão linear: o intervalo $[-E, +E]$ é dividido em pedaços de tamanho $\frac{2E}{2^N}$ com fronteiras

$$\left[k\frac{E}{2^{N-1}}, (k+1)\frac{E}{2^{N-1}}\right], \quad k = -2^{N-1}, \ldots, 2^{N-1} - 1.$$

- Cada intervalo destes será mapeado em um único código de N bits que normalmente representa o valor médio do intervalo.

Quantização Linear (LQ)

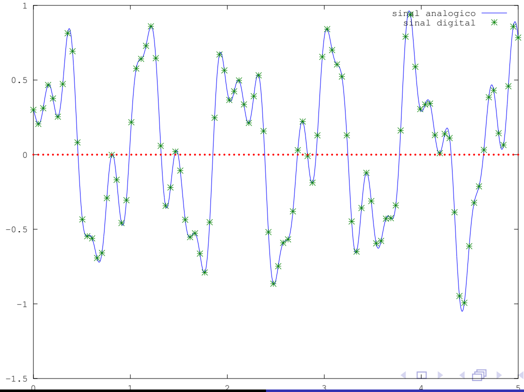
- Objetivo: Mapear uma faixa contínua de valores de entrada $[-E, +E]$ a um conjunto finito de 2^N valores de amplitude discreta.
- Divisão linear: o intervalo $[-E, +E]$ é dividido em pedaços de tamanho $\frac{2E}{2^N}$ com fronteiras

$$\left[k\frac{E}{2^{N-1}}, (k+1)\frac{E}{2^{N-1}}\right], \quad k = -2^{N-1}, \ldots, 2^{N-1} - 1.$$

- Cada intervalo destes será mapeado em um único código de N bits que normalmente representa o valor médio do intervalo.
- Assimetria na atribuição: pontos na fronteira de dois intervalos devem ser "arredondados" para cima ou para baixo.

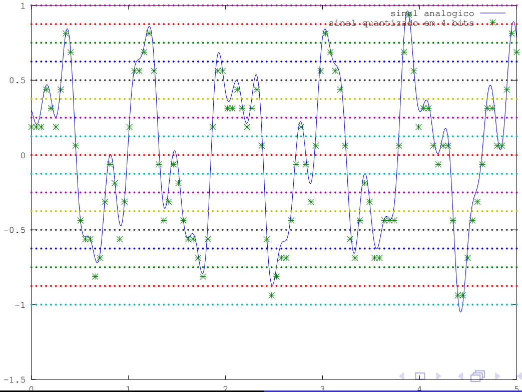
Exemplo: Quantização Linear

Sinal amostrado sem quantização:



Exemplo: Quantização Linear

Sinal amostrado e quantizado:



Erro de quantização

- Seja $q(x)$ o mapa não-linear que transforma uma amplitude $x \in [-E, +E]$ em um dos códigos $q \in \{0, 1, \ldots, 2^N - 1\}$ e $d(q)$ o mapa que atribui um código $q \in \{0, 1, \ldots, 2^N\}$ a um valor $x \in [-E, +E]$.

Erro de quantização

- Seja $q(x)$ o mapa não-linear que transforma uma amplitude $x \in [-E, +E]$ em um dos códigos $q \in \{0, 1, \ldots, 2^N - 1\}$ e $d(q)$ o mapa que atribui um código $q \in \{0, 1, \ldots, 2^N\}$ a um valor $x \in [-E, +E]$.
- A composição quantização+dequantização $d(q(x))$ representa um processo com perda de informação, já que $q(x)$ não é inversível. Em particular, $d(q(x)) \neq x$ para quase todo $x \in [-E, +E]$.

Erro de quantização

- Seja $q(x)$ o mapa não-linear que transforma uma amplitude $x \in [-E, +E]$ em um dos códigos $q \in \{0, 1, \ldots, 2^N - 1\}$ e $d(q)$ o mapa que atribui um código $q \in \{0, 1, \ldots, 2^N\}$ a um valor $x \in [-E, +E]$.
- A composição quantização+dequantização $d(q(x))$ representa um processo com perda de informação, já que $q(x)$ não é inversível. Em particular, $d(q(x)) \neq x$ para quase todo $x \in [-E, +E]$.
- O sinal $x[n] - d(q(x[n]))$ é chamado de ruído de quantização, sendo sua amplitude máxima $\frac{E}{2^N}$ no caso da LQ.

Relação Sinal/Ruído da LQ

- Podemos medir a relação sinal/ruído no caso específico do ruído de LQ pela expressão

$$SQNR = \frac{\text{ampl. máx. representável}}{\text{ampl. máx. ruído quant.}} = \frac{E}{E/(2^N)} = 2^N,$$

Relação Sinal/Ruído da LQ

- Podemos medir a relação sinal/ruído no caso específico do ruído de LQ pela expressão

$$SQNR = \frac{\text{ampl. máx. representável}}{\text{ampl. máx. ruído quant.}} = \frac{E}{E/(2^N)} = 2^N,$$

ou em decibeis:

$$SQNR_{dB} = 20 \log_{10} 2^N = 20N \log_{10} 2 \approx 6N.$$

(cada bit acrescenta 6 dB na relação sinal/ruído).

Relação Sinal/Ruído da LQ

- Podemos medir a relação sinal/ruído no caso específico do ruído de LQ pela expressão

$$SQNR = \frac{\text{ampl. máx. representável}}{\text{ampl. máx. ruído quant.}} = \frac{E}{E/(2^N)} = 2^N,$$

ou em decibeis:

$$SQNR_{dB} = 20\log_{10} 2^N = 20N\log_{10} 2 \approx 6N.$$

(cada bit acrescenta 6 dB na relação sinal/ruído).

- Exemplos: CD usa amostras de 16 bits, com uma relação sinal/ruído de aproximadamente 96 dB; áudio com amostras de 24 bits possui SQNR de aproximadamente 145.5 dB, maior que a relação entre os limites da percepção humana.

Características do ruído de quantização

- A medida de SQNR linear se refere à amplitude máxima representável: um sinal pianissíssimo em um CD poderia facilmente estar 60 dB abaixo do nível máximo, e nesse caso particular a relação sinal/ruído seria de 36 dB (perceptível).

Características do ruído de quantização

- A medida de SQNR linear se refere à amplitude máxima representável: um sinal pianissíssimo em um CD poderia facilmente estar 60 *dB* abaixo do nível máximo, e nesse caso particular a relação sinal/ruído seria de 36 *dB* (perceptível).
- O ruído de quantização NÃO É independente da entrada, e por isso pode ter características espectrais indesejáveis, que o tornem mais ou menos perceptíveis de acordo com contexto (uma solução para isso é a técnica de *dithering*).

Características do ruído de quantização

- A medida de SQNR linear se refere à amplitude máxima representável: um sinal pianissíssimo em um CD poderia facilmente estar 60 dB abaixo do nível máximo, e nesse caso particular a relação sinal/ruído seria de 36 dB (perceptível).
- O ruído de quantização NÃO É independente da entrada, e por isso pode ter características espectrais indesejáveis, que o tornem mais ou menos perceptíveis de acordo com contexto (uma solução para isso é a técnica de *dithering*).
- Em um caso de distorção limite um sinal senoidal com amplitude $\frac{E}{2^N}$ seria mapeado em uma onda quadrada.

Características do ruído de quantização

- A medida de SQNR linear se refere à amplitude máxima representável: um sinal pianissíssimo em um CD poderia facilmente estar 60 dB abaixo do nível máximo, e nesse caso particular a relação sinal/ruído seria de 36 dB (perceptível).
- O ruído de quantização NÃO É independente da entrada, e por isso pode ter características espectrais indesejáveis, que o tornem mais ou menos perceptíveis de acordo com contexto (uma solução para isso é a técnica de *dithering*).
- Em um caso de distorção limite um sinal senoidal com amplitude $\frac{E}{2^N}$ seria mapeado em uma onda quadrada.
- Uma solução para melhorar a relação sinal/ruído para sons de menor amplitude é usar técnicas de quantização *não-linear*.

Quantização Não-Linear

- Ideia: usar regiões mais finas para amplitudes mais baixas, em detrimento de regiões mais grosseiras nas amplitudes maiores

Quantização Não-Linear

- Ideia: usar regiões mais finas para amplitudes mais baixas, em detrimento de regiões mais grosseiras nas amplitudes maiores
- Justificativa: um erro de quantização com amplitude maior tem mais chance de passar despercebido (mascaramento) se o sinal é muito mais forte.

Quantização Não-Linear

- Ideia: usar regiões mais finas para amplitudes mais baixas, em detrimento de regiões mais grosseiras nas amplitudes maiores
- Justificativa: um erro de quantização com amplitude maior tem mais chance de passar despercebido (mascaramento) se o sinal é muito mais forte.
- Resultado: melhor relação sinal/ruído para vários níveis de amplitude simultaneamente.

Quantização Não-Linear

- Ideia: usar regiões mais finas para amplitudes mais baixas, em detrimento de regiões mais grosseiras nas amplitudes maiores
- Justificativa: um erro de quantização com amplitude maior tem mais chance de passar despercebido (mascaramento) se o sinal é muito mais forte.
- Resultado: melhor relação sinal/ruído para vários níveis de amplitude simultaneamente.
- Abordagens: quantização em ponto flutuante e quantização logarítmica.

Quantização em Ponto Flutuante (FPQ)

- Considere que usaremos N bits para representar a *mantissa* (com sinal) e P bits para representar o *expoente*.

Quantização em Ponto Flutuante (FPQ)

- Considere que usaremos N bits para representar a *mantissa* (com sinal) e P bits para representar o *expoente*.
- O maior valor representável pela mantissa será então 2^{N-1}. Consideraremos que essa faixa está associada a $P = 0$.

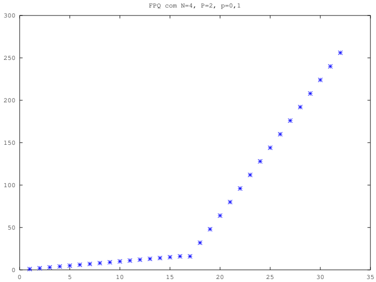
Quantização em Ponto Flutuante (FPQ)

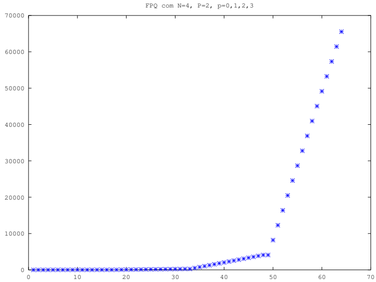
- Considere que usaremos N bits para representar a *mantissa* (com sinal) e P bits para representar o *expoente*.
- O maior valor representável pela mantissa será então 2^{N-1}. Consideraremos que essa faixa está associada a $P = 0$.
- Para $P = 1$ os valores de mantissa serão multiplicados por 2^N; para $P = 2$, os mesmos valores serão multiplicados por $2^N 2^N = 2^{2N}$.

Quantização em Ponto Flutuante (FPQ)

- Considere que usaremos N bits para representar a *mantissa* (com sinal) e P bits para representar o *expoente*.
- O maior valor representável pela mantissa será então 2^{N-1}. Consideraremos que essa faixa está associada a $P = 0$.
- Para $P = 1$ os valores de mantissa serão multiplicados por 2^N; para $P = 2$, os mesmos valores serão multiplicados por $2^N 2^N = 2^{2N}$.
- Em geral, se m é a mantissa e p é o expoente, então o inteiro representado será $m \cdot 2^{pN}$.

Exemplo de FPQ c/ N=4, P=2





Relação Sinal/Ruído para FPQ

- O maior sinal representável em FPQ tem amplitude $2^{N-1}2^{(2^P-1)N}$. Mas o ruído de quantização nesta faixa também será grande: $\frac{1}{2}2^{(2^P-1)N} = 2^{-1}2^{(2^P-1)N}$.

Relação Sinal/Ruído para FPQ

- O maior sinal representável em FPQ tem amplitude $2^{N-1}2^{(2^P-1)N}$. Mas o ruído de quantização nesta faixa também será grande: $\frac{1}{2}2^{(2^P-1)N} = 2^{-1}2^{(2^P-1)N}$.
- A relação sinal/ruído será então:

$$SQNR_{dB} = 20\log_{10}\frac{2^{N-1}2^{(2^P-1)N}}{2^{-1}2^{(2^P-1)N}} = 20\log_{10}2^N \approx 6N.$$

Relação Sinal/Ruído para FPQ

- O maior sinal representável em FPQ tem amplitude $2^{N-1}2^{(2^P-1)N}$. Mas o ruído de quantização nesta faixa também será grande: $\frac{1}{2}2^{(2^P-1)N} = 2^{-1}2^{(2^P-1)N}$.
- A relação sinal/ruído será então:

$$SQNR_{dB} = 20\log_{10}\frac{2^{N-1}2^{(2^P-1)N}}{2^{-1}2^{(2^P-1)N}} = 20\log_{10}2^N \approx 6N.$$

- Na faixa mais fina de representação, a amplitude máxima representável é 2^{N-1} e o ruído de quantização tem amplitude máxima $\frac{1}{2}$, com uma relação sinal/ruído de:

$$SQNR_{dB} = 20\log_{10}\frac{2^{N-1}}{1/2} = 20\log_{10}2^N \approx 6N.$$

Vantagens em relação à LQ

- Em todas as faixas intermediárias (expoentes 2^{pN}) teremos sempre

$$SQNR_{dB} = 20\log_{10}\frac{2^{pN+N-1}}{2^{pN-1}} = 20\log_{10}2^{N} \approx 6N.$$

Isso por si só já é uma vantagem em relação à LQ.

Vantagens em relação à LQ

- Em todas as faixas intermediárias (expoentes 2^{pN}) teremos sempre

$$SQNR_{dB} = 20\log_{10}\frac{2^{pN+N-1}}{2^{pN-1}} = 20\log_{10}2^N \approx 6N.$$

Isso por si só já é uma vantagem em relação à LQ.

- Além desta vantagem, a faixa dinâmica de representação, definida como a relação entre a máxima e a mínima amplitudes representáveis, é neste caso:

$$\begin{aligned}\text{Faixa Dinâmica}(dB) &= 20\log_{10}\frac{2^{N-1}2^{(2^P-1)N}}{1/2}\\ &= 20\log_{10}2^{N+2^P N-N} \approx 6N\cdot 2^P.\end{aligned}$$

Quadro comparativo entre LQ e FPQ

- Podemos comparar FPQ e LQ com o mesmo número de bits se pensarmos em N bits particionados em P bits de expoente e $N - P$ bits de matissa:

	Linear	Ponto Flutuante
$SQNR_{dB}$	$\approx 6N$	$\approx 6(N-P)$
Faixa Dinâmica(dB)	$\approx 6N$	$\approx 6(N-P) \cdot 2^P$

Codificação

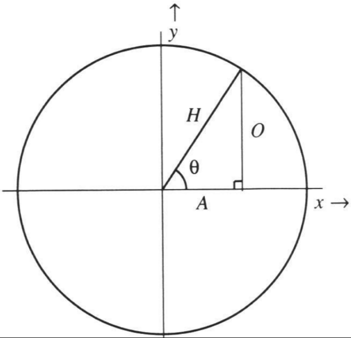
- Após a quantização, cada amostra digital precisa ser colocada em um formato específico de representação:
  - inteiros sem sinal,
  - inteiros com sinal,
  - inteiros com sinal em complemento de 2,
  - com bytes ordenados na sequência natural (*little-endian*) ou inversa (*big-endian*),
  - ponto flutuante

Codificação

- Após a quantização, cada amostra digital precisa ser colocada em um formato específico de representação:
  - inteiros sem sinal,
  - inteiros com sinal,
  - inteiros com sinal em complemento de 2,
  - com bytes ordenados na sequência natural (*little-endian*) ou inversa (*big-endian*),
  - ponto flutuante
- Além disso, os códigos podem receber acréscimos para detectar ou corrigir erros no armazenamento ou transmissão (*error-correction codes*).

Propriedades de funções trigonométricas

Uma função senoidal pode ser vista como a projeção horizontal de um movimento circular uniforme:



$$z(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} A\cos(\omega t + \varphi) \\ A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas cartesianas}} \equiv \overbrace{\begin{bmatrix} \text{magnitude} = A \\ \text{fase} = \omega t + \varphi \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas polares}}$$

$$\cos\theta = \frac{A}{H} \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{O}{H} \qquad \tan\theta = \frac{O}{A}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta &= \frac{O^2}{H^2} + \frac{A^2}{H^2} \\ &= \frac{O^2 + A^2}{H^2} \\ &= 1(\text{Pitágoras}) \end{aligned}$$

Representação de funções trigonométricas

- Lembrando da propriedade:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

Representação de funções trigonométricas

- Lembrando da propriedade:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

temos

$$A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi) = A\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\varphi) + A\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\varphi)$$

Representação de funções trigonométricas

- Lembrando da propriedade:

$$\mathrm{sen}(x+y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\,\mathrm{sen}(y)$$

temos

$$A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) = A\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\varphi) + A\cos(\omega t)\,\mathrm{sen}(\varphi)$$

ou ainda

$$A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

onde $a = A\cos(\varphi)$ e $b = \mathrm{sen}(\varphi)$.

Representação de funções trigonométricas

- Lembrando da propriedade:

$$\mathrm{sen}(x+y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\,\mathrm{sen}(y)$$

temos

$$A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) = A\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\varphi) + A\cos(\omega t)\,\mathrm{sen}(\varphi)$$

ou ainda

$$A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

onde $a = A\cos(\varphi)$ e $b = \mathrm{sen}(\varphi)$.

- Ou seja, qualquer senoide dada por uma amplitude A e uma fase inicial φ pode ser expressa como uma combinação de um seno e um cosseno (de mesma frequência e fase 0).

Representação de funções trigonométricas

- Por outro lado, se $x(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t)$ para a, b arbitrários, podemos encontrar uma representação em amplitude (A) e fase (φ) resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a = A\cos(\varphi) \\ b = A\,\mathrm{sen}(\varphi) \end{cases}$$

Representação de funções trigonométricas

- Por outro lado, se $x(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t)$ para a, b arbitrários, podemos encontrar uma representação em amplitude (A) e fase (φ) resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a = A\cos(\varphi) \\ b = A\,\mathrm{sen}(\varphi) \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = A^2\left(\cos(\varphi)^2 + \mathrm{sen}(\varphi)^2\right) \\ \frac{b}{a} = \frac{\mathrm{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) \end{array}\right.$$

Representação de funções trigonométricas

- Por outro lado, se $x(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t)$ para a, b arbitrários, podemos encontrar uma representação em amplitude (A) e fase (φ) resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a = A\cos(\varphi) \\ b = A\,\mathrm{sen}(\varphi) \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 = A^2\left(\cos(\varphi)^2 + \mathrm{sen}(\varphi)^2\right) \\ \frac{b}{a} = \frac{\mathrm{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) \end{cases}$$

Ou seja, $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$ se definirmos

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right),$$

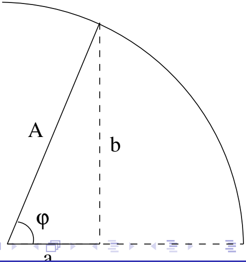
Coordenadas Polares e Cartesianas

- Isso mostra que as representações de senoides em coordenadas *polares* (A, φ) ou *cartesianas* (a, b) são equivalentes:

$$A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

onde

$$\begin{cases} a = A\cos\varphi \\ b = A\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases} \iff \begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a} \end{cases}$$



Espectros de funções periódicas

- Funções periódicas com período T (que satisfazem $f(t) = f(t+T),\ \forall t \in \mathbb{R}$) podem ser escritas utilizando uma série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(k\omega t + \varphi_k) = a_k \operatorname{sen}(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência fundamental da série harmônica $\omega_0 = 0, \omega_1 = \omega, \omega_2 = 2\omega, \omega_3 = 3\omega, \ldots$.

Espectros de funções periódicas

- Funções periódicas com período T (que satisfazem $f(t) = f(t+T),\ \forall t \in \mathbb{R}$) podem ser escritas utilizando uma série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(k\omega t + \varphi_k) = a_k \operatorname{sen}(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência fundamental da série harmônica $\omega_0 = 0, \omega_1 = \omega, \omega_2 = 2\omega, \omega_3 = 3\omega, \ldots$.

- A obtenção dos coeficientes (A_k, φ_k) ou (a_k, b_k) depende da propriedade de ortogonalidade dos senos e cossenos.

Relações de Ortogonalidade

$$\text{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t)$$

Relações de Ortogonalidade

$$\operatorname{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\, dt = 0,\ \forall i,j$$

Relações de Ortogonalidade

$$\mathrm{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t) \cos(\omega_j t)\, dt = 0, \;\; \forall i, j$$

$$\cos(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t)$$

Relações de Ortogonalidade

$$\mathrm{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \equiv \int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i, j$$

$$\cos(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \equiv \int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i \neq j,$$

Relações de Ortogonalidade

$$\mathrm{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i,j$$

$$\cos(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i \neq j,$$

$$\mathrm{sen}(\omega_i t) \perp \mathrm{sen}(\omega_j t)$$

Relações de Ortogonalidade

$$\mathrm{sen}(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i, j$$

$$\cos(\omega_i t) \perp \cos(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i \neq j,$$

$$\mathrm{sen}(\omega_i t) \perp \mathrm{sen}(\omega_j t) \quad \equiv \quad \int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt = 0,\ \forall i \neq j,$$

Relações de Ortogonalidade

Além disso

$$\|\cos(\omega_i t)\|^2 = \int_0^T \cos^2(\omega_i t)\,dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall i \neq 0 \\ T & i = 0 \end{cases}$$

Relações de Ortogonalidade

Além disso

$$\|\cos(\omega_i t)\|^2 = \int_0^T \cos^2(\omega_i t)\, dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall i \neq 0 \\ T & i = 0 \end{cases}$$

$$\|\operatorname{sen}(\omega_i t)\|^2 = \int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega_i t)\, dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \forall i \neq 0 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Considerando a primeira integral, se $i \neq j$,

$$\int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t) \cos(\omega_j t)\, dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Considerando a primeira integral, se $i \neq j$,

$$\int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt \quad = \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{sen}((\omega_i+\omega_j)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{sen}((\omega_i-\omega_j)t)\,dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Considerando a primeira integral, se $i \neq j$,

$$\begin{aligned}\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i+\omega_j)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i-\omega_j)t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i+\omega_j)t)}{\omega_i+\omega_j}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i-\omega_j)t)}{\omega_i-\omega_j}\right]_0^T\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Considerando a primeira integral, se $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i+\omega_j)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i-\omega_j)t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i+\omega_j)t)}{\omega_i+\omega_j}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i-\omega_j)t)}{\omega_i-\omega_j}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i+j)\omega t)}{(i+j)\omega}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i-j)\omega t)}{(i-j)\omega}\right]_0^T
\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Considerando a primeira integral, se $i \neq j$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i+\omega_j)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i-\omega_j)t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i+\omega_j)t)}{\omega_i+\omega_j}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i-\omega_j)t)}{\omega_i-\omega_j}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i+j)\omega t)}{(i+j)\omega}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i-j)\omega t)}{(i-j)\omega}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{[-\cos((i+j)2\pi)+\cos(0)]}{(i+j)\omega} + \frac{1}{2}\,\frac{[-\cos((i-j)2\pi)+\cos(0)]}{(i-j)\omega}
\end{aligned}
$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Considerando a primeira integral, se $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i+\omega_j)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i-\omega_j)t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i+\omega_j)t)}{\omega_i+\omega_j}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i-\omega_j)t)}{\omega_i-\omega_j}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i+j)\omega t)}{(i+j)\omega}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i-j)\omega t)}{(i-j)\omega}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\frac{[-\cos((i+j)2\pi)+\cos(0)]}{(i+j)\omega} + \frac{1}{2}\frac{[-\cos((i-j)2\pi)+\cos(0)]}{(i-j)\omega} \\
&= \frac{1}{2}\frac{[-1+1]}{(i+j)\omega} + \frac{1}{2}\frac{[-1+1]}{(i-j)\omega}
\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Considerando a primeira integral, se $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i+\omega_j)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i-\omega_j)t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i+\omega_j)t)}{\omega_i+\omega_j}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((\omega_i-\omega_j)t)}{\omega_i-\omega_j}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i+j)\omega t)}{(i+j)\omega}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((i-j)\omega t)}{(i-j)\omega}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\frac{[-\cos((i+j)2\pi)+\cos(0)]}{(i+j)\omega} + \frac{1}{2}\frac{[-\cos((i-j)2\pi)+\cos(0)]}{(i-j)\omega} \\
&= \frac{1}{2}\frac{[-1+1]}{(i+j)\omega} + \frac{1}{2}\frac{[-1+1]}{(i-j)\omega} = 0.
\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Quando $i = j$ tem-se

$$\frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i - \omega_j)t)\,dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Quando $i = j$ tem-se

$$\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{sen}((\omega_i - \omega_j)t)\, dt = \int_0^T 0\, dt = 0$$

e assim

$$\int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\, dt \quad = \tfrac{1}{2}\int_0^T \mathrm{sen}((\omega_i + \omega_j)t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{sen}((\omega_i - \omega_j)t)\, dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Quando $i = j$ tem-se

$$\frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i - \omega_j)t)\,dt = \int_0^T 0\,dt = 0$$

e assim

$$\begin{aligned}
\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \tfrac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i + \omega_j)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i - \omega_j)t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{[-1+1]}{(i+j)\omega} + 0
\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Quando $i = j$ tem-se

$$\frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i - \omega_j)t)\, dt = \int_0^T 0\, dt = 0$$

e assim

$$\begin{aligned}
\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\, dt &= \tfrac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i + \omega_j)t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \operatorname{sen}((\omega_i - \omega_j)t)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{[-1+1]}{(i+j)\omega} + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Os produto $\mathrm{sen} \times \mathrm{sen}$ e $\cos \times \cos$ são provados de maneira análoga.

Prova das Relações de Ortogonalidade

Os produto $\mathrm{sen} \times \mathrm{sen}$ e $\cos \times \cos$ são provados de maneira análoga. Finalmente, em relação às normas:

$$\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_i t)\, dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Os produto $\mathrm{sen} \times \mathrm{sen}$ e cos $\times$ cos são provados de maneira análoga. Finalmente, em relação às normas:

$$\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_i t)\, dt \quad = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega_i t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(0t)\, dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Os produto $\mathrm{sen} \times \mathrm{sen}$ e cos $\times$ cos são provados de maneira análoga. Finalmente, em relação às normas:

$$\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_i t)\,dt \quad = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega_i t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(0t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T 1\,dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Os produto $\mathrm{sen} \times \mathrm{sen}$ e cos $\times$ cos são provados de maneira análoga. Finalmente, em relação às normas:

$$\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_i t)\,dt \quad = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega_i t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(0t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T 1\,dt = \frac{T}{2}.$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Os produto $\mathrm{sen} \times \mathrm{sen}$ e cos $\times$ cos são provados de maneira análoga. Finalmente, em relação às normas:

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_i t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega_i t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(0t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T 1\,dt = \frac{T}{2}.\\ \int_0^T \cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\,dt &= \int_0^T \cos(0t)\cos(0t)\,dt = \int_0^T 1\,dt = T\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Os produto $\mathrm{sen} \times \mathrm{sen}$ e $\cos \times \cos$ são provados de maneira análoga. Finalmente, em relação às normas:

$$\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_i t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega_i t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(0t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T 1\,dt = \frac{T}{2}.$$

$$\int_0^T \cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\,dt = \int_0^T \cos(0t)\cos(0t)\,dt = \int_0^T 1\,dt = T$$

Vamos agora usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de a_i e b_i na expressão $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\mathrm{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$.

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando por $\text{sen}(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\int_0^T f(t)\,\text{sen}(\omega_j t)\,dt$$

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando por $\mathrm{sen}(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt = \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\mathrm{sen}(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt$$

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando por $\mathrm{sen}(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\mathrm{sen}(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt\right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt\right)\end{aligned}$$

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando por $\operatorname{sen}(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(\omega_j t)\,dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \operatorname{sen}(\omega_i t)\operatorname{sen}(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\operatorname{sen}(\omega_j t)\,dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\operatorname{sen}(\omega_j t)\,dt\right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t)\operatorname{sen}(\omega_j t)\,dt\right) \\ &= a_j \frac{T}{2}\end{aligned}$$

Coeficientes da Série de Fourier

Multiplicando por $\mathrm{sen}(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando entre 0 e T obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\mathrm{sen}(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt\right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt\right) \\
&= a_j \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

de onde

$$a_j = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt,\ \forall j \neq 0.$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt = \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \,\mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \,\mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \mathrm{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt\right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt\right)
\end{aligned}$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt\right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt\right) \\
&= b_j \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

Coeficientes da Série de Fourier

Analogamente, multiplicando a expressão original por $\cos(\omega_j t)$ (para $j \neq 0$) e integrando,

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt &= \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} a_i \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t) + b_i \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\int_0^T \operatorname{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt\right) + b_i \left(\int_0^T \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)\,dt\right) \\
&= b_j \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$b_j = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt, \ \forall j \neq 0.$$

Coeficientes da Série de Fourier

O valor de b_0 pode ser obtido de modo análogo, lembrando que a última integral possui valor T quando $j = 0$:

Coeficientes da Série de Fourier

O valor de b_0 pode ser obtido de modo análogo, lembrando que a última integral possui valor T quando $j = 0$:

$$b_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

Coeficientes da Série de Fourier

O valor de b_0 pode ser obtido de modo análogo, lembrando que a última integral possui valor T quando $j = 0$:

$$b_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

O valor a_0 na realidade é irrelevante para a decomposição pois aparece multiplicado por $\mathrm{sen}(\omega_i t) = \mathrm{sen}(0t) = 0$, e pode ser definido arbitrariamente como $a_0 = 0$.

Equações de Análise e Síntese

As equações

$$a_j = \begin{cases} \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt, & \forall j \neq 0 \\ 0, & \text{se } j = 0 \end{cases} \qquad b_j = \begin{cases} \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt, & \forall j \neq 0 \\ \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, & \text{se } j = 0 \end{cases}$$

são denominadas *equações de análise*

Equações de Análise e Síntese

As equações

$$a_j = \begin{cases} \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t)\,dt, & \forall j \neq 0 \\ 0, & \text{se } j = 0 \end{cases} \qquad b_j = \begin{cases} \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_j t)\,dt, & \forall j \neq 0 \\ \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, & \text{se } j = 0 \end{cases}$$

são denominadas *equações de análise*, pois permitem decompor (analisar) a função original como soma de funções mais simples, através da *equação de síntese*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\mathrm{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t).$$

Harmônicos do sinal $f(t)$

Cada uma das funções

$$h_i(t) = a_i \operatorname{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$$

é chamada de (i-ésimo) *harmônico* da função $f(t)$ original,

Harmônicos do sinal $f(t)$

Cada uma das funções

$$h_i(t) = a_i \operatorname{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$$

é chamada de (i-ésimo) *harmônico* da função $f(t)$ original, e possui a forma de uma senoide

$$h_i(t) = A_i \operatorname{sen}(\omega_i t + \varphi_i)$$

onde $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ e $\varphi_i = \tan^{-1} \frac{b_i}{a_i}$.

Harmônicos do sinal $f(t)$

Cada uma das funções

$$h_i(t) = a_i \operatorname{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$$

é chamada de (i-ésimo) *harmônico* da função $f(t)$ original, e possui a forma de uma senoide

$$h_i(t) = A_i \operatorname{sen}(\omega_i t + \varphi_i)$$

onde $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ e $\varphi_i = \tan^{-1} \frac{b_i}{a_i}$. A componente D.C. é

$$h_0(t) \equiv b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

e corresponde ao valor médio do sinal.

Números complexos

- A unidade complexa é definida a partir da equação $x^2 + 1 = 0$, que não admite solução em $\mathbb{R}$, porém a hipótese de existência de uma solução fora da reta real não é inconsistente (não gera contradição).

Números complexos

- A unidade complexa é definida a partir da equação $x^2 + 1 = 0$, que não admite solução em $\mathbb{R}$, porém a hipótese de existência de uma solução fora da reta real não é inconsistente (não gera contradição).
- Postula-se assim uma solução denotada por i que satisfaz $i^2 = -1$ (de onde segue também que $(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1$).

Números complexos

- A unidade complexa é definida a partir da equação $x^2 + 1 = 0$, que não admite solução em $\mathbb{R}$, porém a hipótese de existência de uma solução fora da reta real não é inconsistente (não gera contradição).
- Postula-se assim uma solução denotada por i que satisfaz $i^2 = -1$ (de onde segue também que $(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1$).
- Números complexos têm a forma $x = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$, e obedecem aos mesmos axiomas que os números reais em relação às operações elementares.

Senos, cossenos e exponenciais complexas

Podemos representar várias funções que nos interessam aqui através da série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Senos, cossenos e exponenciais complexas

Podemos representar várias funções que nos interessam aqui através da série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Quando tal representação existe, podemos obter os coeficientes a_n calculando a função original e suas derivadas no ponto $x = 0$:

$$f(0) = a_0$$

Senos, cossenos e exponenciais complexas

Podemos representar várias funções que nos interessam aqui através da série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Quando tal representação existe, podemos obter os coeficientes a_n calculando a função original e suas derivadas no ponto $x = 0$:

$$f(0) = a_0$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Senos, cossenos e exponenciais complexas

Podemos representar várias funções que nos interessam aqui através da série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Quando tal representação existe, podemos obter os coeficientes a_n calculando a função original e suas derivadas no ponto $x = 0$:

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \implies f'(0) = a_1$$

Senos, cossenos e exponenciais complexas

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \implies f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Senos, cossenos e exponenciais complexas

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \implies f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \implies f''(0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

Senos, cossenos e exponenciais complexas

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \implies f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \implies f''(0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1) a_n x^{n-m}$$

Senos, cossenos e exponenciais complexas

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \implies f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \implies f''(0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1) a_n x^{n-m} \implies f^{(m)}(0) = m! a_m \implies a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}.$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\operatorname{sen}(x)$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(0)$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(0) + \cos(0)x$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\mathrm{sen}(x) \quad = \mathrm{sen}(0) + \cos(0)x - \tfrac{\mathrm{sen}(0)}{2}x^2$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\mathrm{sen}(x) \qquad = \mathrm{sen}(0) + \cos(0)x - \frac{\mathrm{sen}(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(0) + \cos(0)x - \frac{\mathrm{sen}(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(0) + \cos(0)x - \frac{\mathrm{sen}(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x)$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}(x) &= \mathrm{sen}(0) + \cos(0)x - \tfrac{\mathrm{sen}(0)}{2}x^2 - \tfrac{\cos(0)}{3!}x^3 + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos(x) &= \cos(0) - \mathrm{sen}(0)x - \tfrac{\cos(0)}{2}x^2 + \tfrac{\mathrm{sen}(0)}{3!}x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(0) + \cos(0)x - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \cos(0) - \operatorname{sen}(0)x - \frac{\cos(0)}{2}x^2 + \frac{\operatorname{sen}(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(0) + \cos(0)x - \tfrac{\operatorname{sen}(0)}{2}x^2 - \tfrac{\cos(0)}{3!}x^3 + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos(x) &= \cos(0) - \operatorname{sen}(0)x - \tfrac{\cos(0)}{2}x^2 + \tfrac{\operatorname{sen}(0)}{3!}x^3 + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

e^x

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(0) + \cos(0)x - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos(x) &= \cos(0) - \operatorname{sen}(0)x - \frac{\cos(0)}{2}x^2 + \frac{\operatorname{sen}(0)}{3!}x^3 + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
e^x &= e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Expansão de Taylor de senos, cossenos e exponenciais

Usando a expansão $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^n$, temos as representações

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(x) &= \mathrm{sen}(0) + \cos(0)x - \frac{\mathrm{sen}(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos(x) &= \cos(0) - \mathrm{sen}(0)x - \frac{\cos(0)}{2}x^2 + \frac{\mathrm{sen}(0)}{3!}x^3 + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
e^x &= e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \cdots &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Relação de Euler

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$) temos

$$e^{i\omega}$$

Relação de Euler

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$) temos

$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!}$$

Relação de Euler

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$) temos

$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \omega^n}{n!}$$

Relação de Euler

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$) temos

$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \omega^n}{n!}$$

Observe que para n par temos $i^0, i^2, i^4, i^6, \ldots = 1, -1, 1, -1, \ldots$

Relação de Euler

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$) temos

$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \omega^n}{n!}$$

Observe que para n par temos $i^0, i^2, i^4, i^6, \ldots = 1, -1, 1, -1, \ldots$ e para n ímpar temos $i^1, i^3, i^5, i^7, \ldots = i, -i, i, -i, \ldots$.

Relação de Euler

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$) temos

$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \omega^n}{n!}$$

Observe que para n par temos $i^0, i^2, i^4, i^6, \ldots = 1, -1, 1, -1, \ldots$ e para n ímpar temos $i^1, i^3, i^5, i^7, \ldots = i, -i, i, -i, \ldots$. Assim obtemos a chamada *Relação de Euler*:

$$e^{i\omega}$$

Relação de Euler

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$) temos

$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \omega^n}{n!}$$

Observe que para n par temos $i^0, i^2, i^4, i^6, \ldots = 1, -1, 1, -1, \ldots$ e para n ímpar temos $i^1, i^3, i^5, i^7, \ldots = i, -i, i, -i, \ldots$. Assim obtemos a chamada *Relação de Euler*:

$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Relação de Euler

Utilizando a expansão de Taylor de e^x no ponto $x = i\omega$ (onde i é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$) temos

$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \omega^n}{n!}$$

Observe que para n par temos $i^0, i^2, i^4, i^6, \ldots = 1, -1, 1, -1, \ldots$ e para n ímpar temos $i^1, i^3, i^5, i^7, \ldots = i, -i, i, -i, \ldots$. Assim obtemos a chamada *Relação de Euler*:

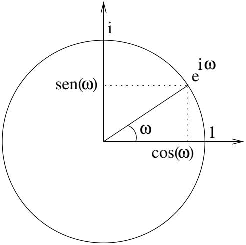
$$e^{i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(\omega) + i\,\mathrm{sen}(\omega).$$

A exponencial complexa $e^{i\omega}$

O número complexo $e^{i\omega}$ possui como representação Cartesiana a expressão $\cos(\omega) + i\,\mathrm{sen}(\omega)$. Em coordenadas polares representamos o mesmo número através de seu módulo e do ângulo ou fase em relação ao eixo real:

$$|e^{i\omega}| = \sqrt{\cos^2(\omega) + \mathrm{sen}^2(\omega)} = 1$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sen}(\omega)}{\cos(\omega)}\right) = \tan^{-1}\tan(\omega) = \omega$$



Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$e^{-i\omega}$$

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$e^{-i\omega} = e^{i(-\omega)}$$

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$\begin{aligned} e^{-i\omega} &= e^{i(-\omega)} \\ &= \cos(-\omega) + i\,\mathrm{sen}(-\omega) \end{aligned}$$

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$
\begin{aligned}
e^{-i\omega} &= e^{i(-\omega)} \\
&= \cos(-\omega) + i \operatorname{sen}(-\omega) \\
&= \cos(\omega) - i \operatorname{sen}(\omega)
\end{aligned}
$$

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$\begin{aligned} e^{-i\omega} &= e^{i(-\omega)} \\ &= \cos(-\omega) + i\,\mathrm{sen}(-\omega) \\ &= \cos(\omega) - i\,\mathrm{sen}(\omega) \end{aligned}$$

ou ainda, $e^{-i\omega} = (e^{i\omega})^*$ ($*$ denota a operação de conjugação, definida por $(a+ib)^* = a - ib$).

Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$\begin{aligned} e^{-i\omega} &= e^{i(-\omega)} \\ &= \cos(-\omega) + i\,\mathrm{sen}(-\omega) \\ &= \cos(\omega) - i\,\mathrm{sen}(\omega) \end{aligned}$$

ou ainda, $e^{-i\omega} = (e^{i\omega})^*$ ($*$ denota a operação de conjugação, definida por $(a+ib)^* = a - ib$). A partir das expressões $e^{-i\omega} = \cos(\omega) - i\,\mathrm{sen}(\omega)$ e $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\,\mathrm{sen}(\omega)$ podemos obter:

$$\cos(\omega) = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \qquad \mathrm{sen}(\omega) = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$\operatorname{sen}(a+b)$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} = \frac{e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}}{2i}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} = \frac{e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}}{2i} \\
&= \frac{(\cos(a)+i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b)) - (\cos(-a)+i\operatorname{sen}(-a))(\cos(-b)+i\operatorname{sen}(-b))}{2i}
\end{aligned}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i} = \frac{e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{2i} \\
&= \frac{(\cos(a)+i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b))-(\cos(-a)+i\operatorname{sen}(-a))(\cos(-b)+i\operatorname{sen}(-b))}{2i} \\
&= \frac{(\cos(a)+i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b))-(\cos(a)-i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)-i\operatorname{sen}(b))}{2i}
\end{aligned}$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} = \frac{e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}}{2i} \\
&= \frac{(\cos(a)+i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b)) - (\cos(-a)+i\operatorname{sen}(-a))(\cos(-b)+i\operatorname{sen}(-b))}{2i} \\
&= \frac{(\cos(a)+i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b)) - (\cos(a)-i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)-i\operatorname{sen}(b))}{2i} \\
&= \frac{\left(\cos(a)\cos(b)+i\cos(a)\operatorname{sen}(b)+i\operatorname{sen}(a)\cos(b)+i^2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\right)}{2i} \\
&\quad - \frac{\left(\cos(a)\cos(b)-i\cos(a)\operatorname{sen}(b)-i\operatorname{sen}(a)\cos(b)+i^2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\right)}{2i}
\end{aligned}
$$

Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i} = \frac{e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{2i} \\
&= \frac{(\cos(a)+i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b))-(\cos(-a)+i\operatorname{sen}(-a))(\cos(-b)+i\operatorname{sen}(-b))}{2i} \\
&= \frac{(\cos(a)+i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b))-(\cos(a)-i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)-i\operatorname{sen}(b))}{2i} \\
&= \frac{\left(\cos(a)\cos(b)+i\cos(a)\operatorname{sen}(b)+i\operatorname{sen}(a)\cos(b)+i^2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\right)}{2i} \\
&\quad - \frac{\left(\cos(a)\cos(b)-i\cos(a)\operatorname{sen}(b)-i\operatorname{sen}(a)\cos(b)+i^2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\right)}{2i} \\
&= \frac{2i\cos(a)\operatorname{sen}(b)+2i\operatorname{sen}(a)\cos(b)}{2i}
\end{aligned}$$

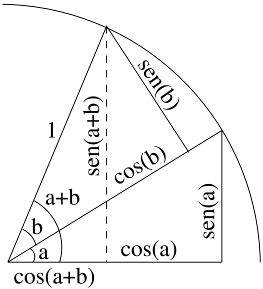
Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i} = \frac{e^{ia}e^{ib}-e^{-ia}e^{-ib}}{2i} \\
&= \frac{(\cos(a)+i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b))-(\cos(-a)+i\operatorname{sen}(-a))(\cos(-b)+i\operatorname{sen}(-b))}{2i} \\
&= \frac{(\cos(a)+i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)+i\operatorname{sen}(b))-(\cos(a)-i\operatorname{sen}(a))(\cos(b)-i\operatorname{sen}(b))}{2i} \\
&= \frac{\left(\cos(a)\cos(b)+i\cos(a)\operatorname{sen}(b)+i\operatorname{sen}(a)\cos(b)+i^2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\right)}{2i} \\
&\quad - \frac{\left(\cos(a)\cos(b)-i\cos(a)\operatorname{sen}(b)-i\operatorname{sen}(a)\cos(b)+i^2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\right)}{2i} \\
&= \frac{2i\cos(a)\operatorname{sen}(b)+2i\operatorname{sen}(a)\cos(b)}{2i} \\
&= \cos(a)\operatorname{sen}(b)+\operatorname{sen}(a)\cos(b)
\end{aligned}
$$

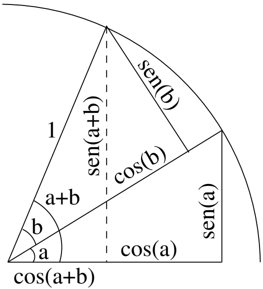
Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:



Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:

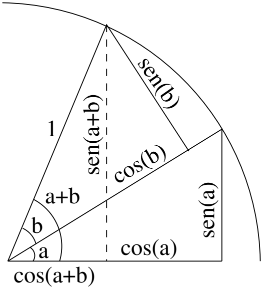


Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{(e^{ia}+e^{-ia})}{2}\frac{(e^{ib}+e^{-ib})}{2}$$

Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:



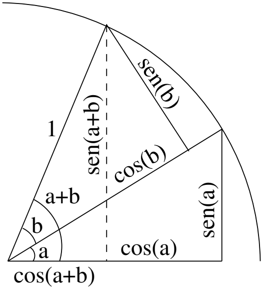
Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{(e^{ia}+e^{-ia})}{2}\,\frac{(e^{ib}+e^{-ib})}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}\right)+\left(e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}\right)}{2}$$

Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:



Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{(e^{ia}+e^{-ia})}{2}\frac{(e^{ib}+e^{-ib})}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}\right)+\left(e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(a+b)+\frac{1}{2}\cos(a-b)$$

Série complexa de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com período T. Vamos tentar encontrar valores complexos $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tais que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $\omega_n = n\omega$.

Relações de Ortogonalidade

As funções $e^{i\omega_n t}$ e $e^{i\omega_m t}$ são *ortogonais*, ou seja,

$$\int_0^T e^{i\omega_n t}\left(e^{i\omega_m t}\right)^* dt = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt = 0, \ \forall n \neq m.$$

Relações de Ortogonalidade

As funções $e^{i\omega_n t}$ e $e^{i\omega_m t}$ são *ortogonais*, ou seja,

$$\int_0^T e^{i\omega_n t}\left(e^{i\omega_m t}\right)^* dt = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt = 0, \ \forall n \neq m.$$

Além disso, para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\|e^{i\omega_n t}\|^2 = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_n t}\, dt = T.$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $n \neq m$,

$$\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $n \neq m$,

$$\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt \quad = \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right]_0^T$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $n \neq m$,

$$\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt \quad = \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right]_0^T = \frac{e^{i(n-m)\omega T} - 1}{i(n-m)\omega}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $n \neq m$,

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\,dt &= \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right]_0^T = \frac{e^{i(n-m)\omega T} - 1}{i(n-m)\omega} \\ &= \frac{\cos((n-m)2\pi) + i\,\mathrm{sen}((n-m)2\pi) - 1}{i(n-m)\omega}\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt &= \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right]_0^T = \frac{e^{i(n-m)\omega T} - 1}{i(n-m)\omega} \\
&= \frac{\cos((n-m)2\pi) + i\,\mathrm{sen}((n-m)2\pi) - 1}{i(n-m)\omega} \\
&= \frac{1 + i \cdot 0 - 1}{i(n-m)\omega} = 0.
\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt &= \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right]_0^T = \frac{e^{i(n-m)\omega T} - 1}{i(n-m)\omega} \\
&= \frac{\cos((n-m)2\pi) + i\,\mathrm{sen}((n-m)2\pi) - 1}{i(n-m)\omega} \\
&= \frac{1 + i \cdot 0 - 1}{i(n-m)\omega} = 0.
\end{aligned}$$

Além disso

$$\|e^{i\omega_n t}\|^2 = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_n t}\, dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\, dt &= \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right]_0^T = \frac{e^{i(n-m)\omega T} - 1}{i(n-m)\omega} \\
&= \frac{\cos((n-m)2\pi) + i\,\mathrm{sen}((n-m)2\pi) - 1}{i(n-m)\omega} \\
&= \frac{1 + i \cdot 0 - 1}{i(n-m)\omega} = 0.
\end{aligned}$$

Além disso

$$\|e^{i\omega_n t}\|^2 = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_n t}\, dt = \int_0^T e^{i(n-n)\omega t}\, dt$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $n \neq m$,

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\,dt &= \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right]_0^T = \frac{e^{i(n-m)\omega T} - 1}{i(n-m)\omega} \\ &= \frac{\cos((n-m)2\pi) + i\,\mathrm{sen}((n-m)2\pi) - 1}{i(n-m)\omega} \\ &= \frac{1 + i \cdot 0 - 1}{i(n-m)\omega} = 0.\end{aligned}$$

Além disso

$$\|e^{i\omega_n t}\|^2 = \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_n t}\,dt = \int_0^T e^{i(n-n)\omega t}\,dt = \int_0^T 1\,dt = T.$$

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$.

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\int_0^T f(t)e^{-i\omega_m t}\,dt \quad = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\,dt$$

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)e^{-i\omega_m t}\,dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\,dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\,dt
\end{aligned}$$

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)e^{-i\omega_m t}\,dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\,dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\,dt = F_m T \end{aligned}$$

Série complexa de Fourier

Podemos usar as relações de ortogonalidade para obter os valores de F_n na expressão $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$. Multiplicando por $e^{-i\omega_m t}$ e integrando entre 0 e T temos

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_m t}\,dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\,dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_0^T e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t}\,dt = F_m T\end{aligned}$$

ou seja, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$,

$$F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt.$$

Equações de Análise e Síntese

Equação de Análise:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} \, dt$$

Equações de Análise e Síntese

Equação de Análise:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} \, dt$$

Equação de Síntese:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$F_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_{-n}t}\,dt$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_{-\boldsymbol{n}}\boldsymbol{t}}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^*(e^{-i\omega_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{t}})^*\,dt \end{aligned}$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_{-n}t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^*(e^{-i\omega_n t})^*\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T (f(t)e^{-i\omega_n t})^*\,dt \end{aligned}$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$\begin{aligned}
F_{-n} &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_{-\boldsymbol{n}}t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^*(e^{-i\omega_{\boldsymbol{n}}t})^*\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T (f(t)e^{-i\omega_{\boldsymbol{n}}t})^*\,dt \\
&= \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_{\boldsymbol{n}}t}\,dt\right)^*
\end{aligned}$$

Simetria da Série de Fourier

Uma propriedade fundamental dos valores F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Prova:

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_{-n}t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^*(e^{-i\omega_n t})^*\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T (f(t)e^{-i\omega_n t})^*\,dt \\ &= \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt\right)^* = F_n^*. \end{aligned}$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$.

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$, temos que o n-ésimo harmônico de f é dado por

$$h_n(t) = F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t}$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$, temos que o n-ésimo harmônico de f é dado por

$$
\begin{aligned}
h_n(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \\
&= \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t}
\end{aligned}
$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$, temos que o n-ésimo harmônico de f é dado por

$$\begin{aligned} h_n(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \\ &= \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t} \\ &= \alpha_n \left(e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} + e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} \right) \end{aligned}$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$, temos que o n-ésimo harmônico de f é dado por

$$
\begin{aligned}
h_n(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \\
&= \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t} \\
&= \alpha_n \left(e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} + e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} \right) \\
&= 2\alpha_n \cos(\omega_n t + \varphi_n).
\end{aligned}
$$

Harmônicos da série de Fourier complexa

Se $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$, temos que $F_{-n} = (F_n)^* = \alpha_n e^{-i\varphi_n}$. Lembrando que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$, temos que o n-ésimo harmônico de f é dado por

$$\begin{aligned} h_n(t) &= F_n e^{i\omega_n t} + F_{-n} e^{i\omega_{-n} t} \\ &= \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t} \\ &= \alpha_n \left(e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} + e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} \right) \\ &= 2\alpha_n \cos(\omega_n t + \varphi_n). \end{aligned}$$

Voltamos aos reais!

Coeficiente D.C.

- Para $n = 0$ o coeficiente F_0 é calculado como

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

e corresponde ao valor médio da função f.

Coeficiente D.C.

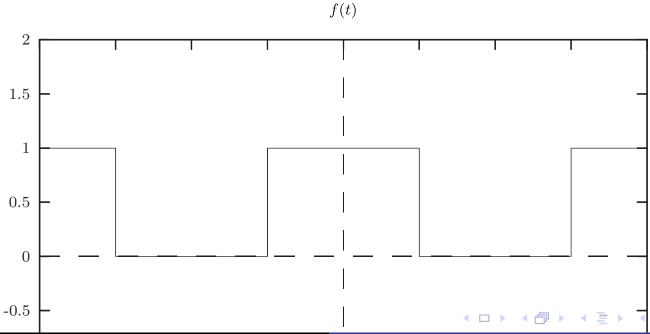
- Para $n = 0$ o coeficiente F_0 é calculado como

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

  e corresponde ao valor médio da função f.
- Este "harmônico" tem a função de transladar verticalmente os demais harmônicos (que oscilam entre $+2\alpha_n$ e $-2\alpha_n$) para a "posição correta" da função f.

Exemplo: onda quadrada

Exemplo: Considere a função $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t \leq -1 \\ 1, & -1 < t \leq 1 \\ 0, & -1 < t \leq 2 \\ f(t+4), & \forall t \end{cases}$.



Exemplo: onda quadrada

Temos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_n = n\frac{\pi}{2}$.

Exemplo: onda quadrada

Temos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_n = n\frac{\pi}{2}$. Assim, para $n \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega_n t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-i\omega_n} - e^{i\omega_n}}{-i\omega_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(\omega_n)}{\omega_n} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}
$$

Exemplo: onda quadrada

Temos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_n = n\frac{\pi}{2}$. Assim, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega_n t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-i\omega_n} - e^{i\omega_n}}{-i\omega_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}(\omega_n)}{\omega_n} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

e para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

Exemplo: onda quadrada

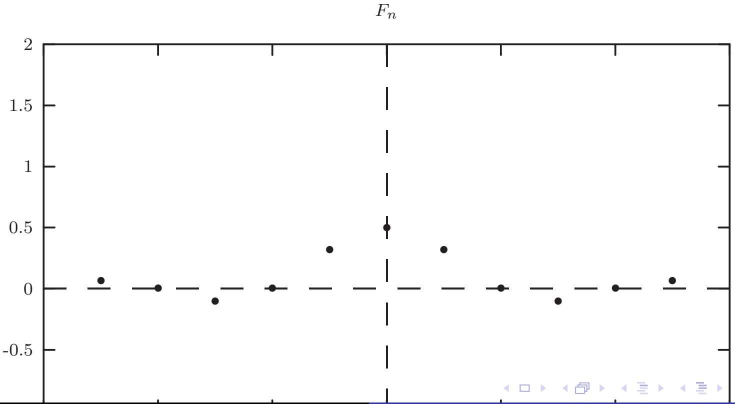
Temos $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ e $\omega_n = n\frac{\pi}{2}$. Assim, para $n \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega_n t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-i\omega_n} - e^{i\omega_n}}{-i\omega_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(\omega_n)}{\omega_n} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}
$$

e para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. Observe que os extremos de integração utilizados nas contas acima foram $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Qualquer período completo pode ser utilizado.

Exemplo: onda quadrada

Espectro da onda quadrada:



Exemplo: onda quadrada

Pela equação de síntese,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$$

Exemplo: onda quadrada

Pela equação de síntese,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\cdots + \frac{1}{5}e^{-i5\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3}e^{-i3\frac{\pi}{2}t} + e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{\pi}{2} + e^{i\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3}e^{i3\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{5}e^{i5\frac{\pi}{2}t} - \cdots\right] \end{aligned}$$

Exemplo: onda quadrada

Pela equação de síntese,

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\cdots + \frac{1}{5}e^{-i5\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3}e^{-i3\frac{\pi}{2}t} + e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{\pi}{2} + e^{i\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3}e^{i3\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{5}e^{i5\frac{\pi}{2}t} - \cdots\right]
\end{aligned}
$$

e o n-ésimo harmônico (para n ímpar) é dado por

$$h_n(t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\pi}[e^{-in\frac{\pi}{2}t} + e^{in\frac{\pi}{2}t}]$$

Exemplo: onda quadrada

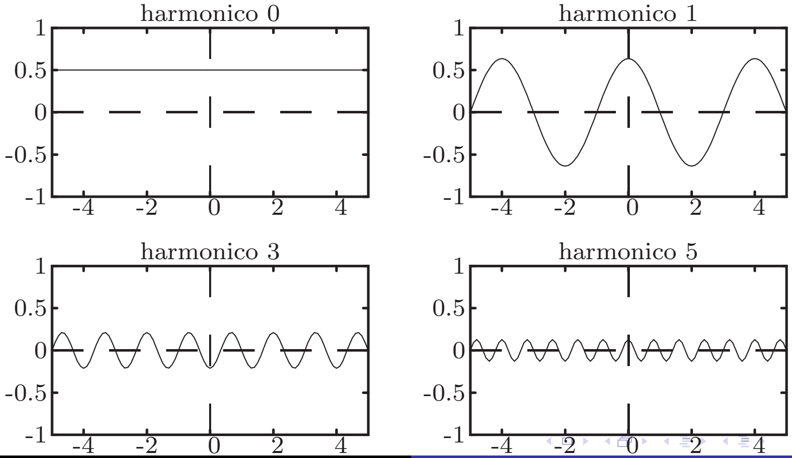
Pela equação de síntese,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\cdots + \frac{1}{5}e^{-i5\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3}e^{-i3\frac{\pi}{2}t} + e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{\pi}{2} + e^{i\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{3}e^{i3\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{5}e^{i5\frac{\pi}{2}t} - \cdots\right] \end{aligned}$$

e o n-ésimo harmônico (para n ímpar) é dado por

$$h_n(t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\pi}[e^{-in\frac{\pi}{2}t} + e^{in\frac{\pi}{2}t}] = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right).$$

Harmônicos da onda quadrada



Funções pares e ímpares

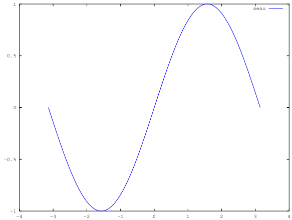
- Uma função f é **par** se satisfaz $f(t) = f(-t), \ \forall t$.

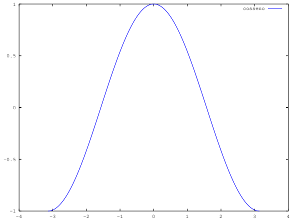
Funções pares e ímpares

- Uma função f é **par** se satisfaz $f(t) = f(-t),\ \forall t$.
- Uma função f é **ímpar** se satisfaz $f(t) = -f(-t),\ \forall t$.

Funções pares e ímpares

- Uma função f é **par** se satisfaz $f(t) = f(-t), \ \forall t$.
- Uma função f é **ímpar** se satisfaz $f(t) = -f(-t), \ \forall t$.
- Exemplos de função par e função ímpar são $\cos(t)$ e $\mathrm{sen}(t)$, respectivamente.





Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.

Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.
- Se f e g são ímpares, fg é par.

Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.
- Se f e g são ímpares, fg é par.
- Se f é par e g é ímpar, fg é ímpar.

Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.
- Se f e g são ímpares, fg é par.
- Se f é par e g é ímpar, fg é ímpar.
- Se f é par, $\int_{-U}^{U} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{U} f(t)\,dt$.

Funções pares e ímpares

Algumas propriedades de funções pares e ímpares de fácil verificação são enumeradas a seguir:

- Se f e g são pares, fg é par.
- Se f e g são ímpares, fg é par.
- Se f é par e g é ímpar, fg é ímpar.
- Se f é par, $\int_{-U}^{U} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{U} f(t)\,dt$.
- Se f é ímpar, $\int_{-U}^{U} f(t)\,dt = 0$.

Paridade dos coeficientes de Fourier

Seja $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ (formas Cartesiana e polar).

Paridade dos coeficientes de Fourier

Seja $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ (formas Cartesiana e polar). Note que

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \alpha_n \cos \varphi_n \\ B_n = \alpha_n \,\mathrm{sen}\, \varphi_n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n = \tan^{-1} \frac{B_n}{A_n} \end{array} \right.$$

Paridade dos coeficientes de Fourier

Seja $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ (formas Cartesiana e polar). Note que

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \alpha_n \cos \varphi_n \\ B_n = \alpha_n \operatorname{sen} \varphi_n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n = \tan^{-1} \frac{B_n}{A_n} \end{array} \right.$$

Lembrando que $F_{-n} = F_n^*$ temos $A_{-n} + iB_{-n} = A_n - iB_n$ e também $\alpha_{-n} e^{i\varphi_{-n}} = \alpha_n e^{i(-\varphi_n)}$

Paridade dos coeficientes de Fourier

Seja $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ (formas Cartesiana e polar). Note que

$$\left\{\begin{array}{l} A_n = \alpha_n \cos\varphi_n \\ B_n = \alpha_n \,\mathrm{sen}\,\varphi_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n = \tan^{-1}\frac{B_n}{A_n} \end{array}\right.$$

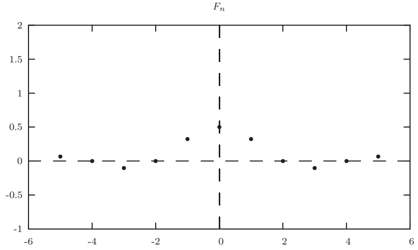
Lembrando que $F_{-n} = F_n^*$ temos $A_{-n} + iB_{-n} = A_n - iB_n$ e também $\alpha_{-n}e^{i\varphi_{-n}} = \alpha_n e^{i(-\varphi_n)}$, de onde segue imediatamente o resultado:

- A_n e α_n são funções pares do argumento n, bem como
- B_n e φ_n são funções ímpares de n.

Retomando o exemplo da onda quadrada

Vimos que a função $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t \leq -1 \\ 1, & -1 < t \leq 1 \\ 0, & -1 < t \leq 2 \\ f(t+4), & \forall t \end{cases}$ possui coeficientes de Fourier dados por

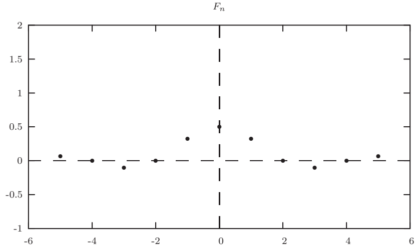
$$F_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n\pi} & n \text{ ímpar} \\ 0 & n \neq 0 \text{ par} \\ \frac{1}{2} & n = 0. \end{cases}$$



Retomando o exemplo da onda quadrada

Vimos que a função $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t \leq -1 \\ 1, & -1 < t \leq 1 \\ 0, & -1 < t \leq 2 \\ f(t+4), & \forall t \end{cases}$ possui coeficientes de Fourier dados por

$$F_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n\pi} & n \text{ ímpar} \\ 0 & n \neq 0 \text{ par} \\ \frac{1}{2} & n = 0. \end{cases}$$



Observe que F_n é real e consequentemente par.

Decomposição em f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; definimos as funções

$$f_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]$$

$$f_{\text{ímpar}}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$$

Decomposição em f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; definimos as funções

$$f_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]$$

$$f_{\text{ímpar}}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$$

É fácil mostrar que f_{par} é uma função par e $f_{\text{ímpar}}$ é uma função ímpar.

Decomposição em f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; definimos as funções

$$f_{\text{par}}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]$$

$$f_{\text{ímpar}}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$$

É fácil mostrar que f_{par} é uma função par e $f_{\text{ímpar}}$ é uma função ímpar. Mais ainda,

$$\begin{aligned} f_{\text{par}}(t) + f_{\text{ímpar}}(t) &= \tfrac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right] + \tfrac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[f(t) + f(-t) + f(t) - f(-t)\right] = f(t). \end{aligned}$$

Espectros de f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica e seja $\{F_n = A_n + iB_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a série complexa de Fourier associada a f.

Espectros de f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica e seja $\{F_n = A_n + iB_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a série complexa de Fourier associada a f. Então

- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a f_{par} e
- $\{iB_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a $f_{\text{ímpar}}$.

Espectros de f_{par} e $f_{\text{ímpar}}$

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica e seja $\{F_n = A_n + iB_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ a série complexa de Fourier associada a f. Então

- $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a f_{par} e
- $\{iB_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é a série complexa de Fourier associada a $f_{\text{ímpar}}$.

Prova: notas de aula sobre Fourier.

Corolário

Duas consequências imediatas do resultado anterior são:

$$f(t) \text{ é par} \iff F(n) \text{ é real e par}$$

Corolário

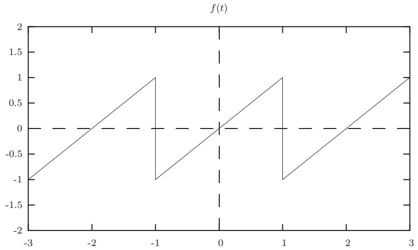
Duas consequências imediatas do resultado anterior são:

$$f(t) \text{ é par} \iff F(n) \text{ é real e par}$$

$$f(t) \text{ é ímpar} \iff F(n) \text{ é imaginária e ímpar}$$

Exemplo: Função Dente-de-Serra

Exemplo: Considere a função



com $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, $\omega_n = n\pi$.

Espectro da Função Dente-de-Serra

Para $n \neq 0$,

$$F_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt$$

Espectro da Função Dente-de-Serra

Para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-i\omega_n t}\,dt \end{aligned}$$

Espectro da Função Dente-de-Serra

Para $n \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-i\omega_n t}\,dt \\
&= (\text{...integração por partes...}) \\
&= i\tfrac{(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Espectro da Função Dente-de-Serra

Para $n \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-i\omega_n t}\,dt \\
&= (\text{...integração por partes...}) \\
&= i\tfrac{(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = 0$.

Espectro da Função Dente-de-Serra

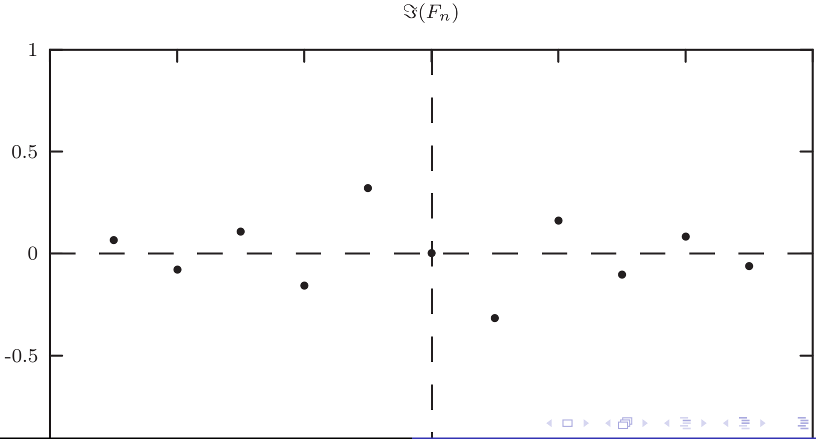
Para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-i\omega_n t}\,dt \\ &= (\text{...integração por partes...}) \\ &= i\tfrac{(-1)^n}{n\pi}. \end{aligned}$$

Para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = 0$.

Observe que F_n é puramente imaginária e consequentemente ímpar.

Espectro da Função Dente-de-Serra



Harmônicos da Função Dente-de-Serra

O n-ésimo harmônico de f é dado por

$$h_n(t) \quad = i\frac{(-1)^{-n}}{-n\pi}e^{-in\pi t} + i\frac{(-1)^n}{n\pi}e^{in\pi t}$$

Harmônicos da Função Dente-de-Serra

O n-ésimo harmônico de f é dado por

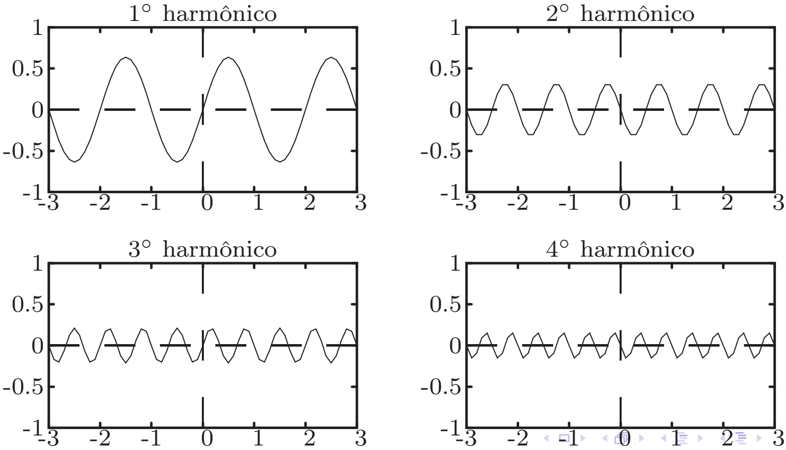
$$\begin{aligned} h_n(t) &= i\frac{(-1)^{-n}}{-n\pi}e^{-in\pi t} + i\frac{(-1)^n}{n\pi}e^{in\pi t} \\ &= i\frac{(-1)^n}{n\pi}[e^{in\pi t} - e^{-in\pi t}] \end{aligned}$$

Harmônicos da Função Dente-de-Serra

O n-ésimo harmônico de f é dado por

$$\begin{aligned} h_n(t) &= i\frac{(-1)^{-n}}{-n\pi}e^{-in\pi t} + i\frac{(-1)^n}{n\pi}e^{in\pi t} \\ &= i\frac{(-1)^n}{n\pi}[e^{in\pi t} - e^{-in\pi t}] \\ &= -2\frac{(-1)^n}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi t). \end{aligned}$$

Harmônicos da Função Dente-de-Serra



Transformada de Fourier Contínua

Se $f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é periódica não faz sentido escrevê-la como combinação linear de senos e cossenos harmonicamente relacionados.

Transformada de Fourier Contínua

Se $f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é periódica não faz sentido escrevê-la como combinação linear de senos e cossenos harmonicamente relacionados. No entanto, muitas vezes é possível escrevê-la como combinação linear de todos os senos e cossenos que existem, utilizando todas as frequências $\omega \in \mathbb{R}$ disponíveis:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \quad \textbf{(equação de síntese)}$$

Transformada de Fourier Contínua

Para funções que satisfazem

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 \, dt < \infty,$$

pode-se provar que os valores de $F(\omega)$ que satisfazem a equação de síntese são dados por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \quad \textbf{(equação de análise)}$$

Transformada de Fourier Contínua

Se $f(t)$ e $F(\omega)$ estão relacionadas pelas equações de análise e síntese, escrevemos

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega).$$

Transformada de Fourier Contínua

Se $f(t)$ e $F(\omega)$ estão relacionadas pelas equações de análise e síntese, escrevemos

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega).$$

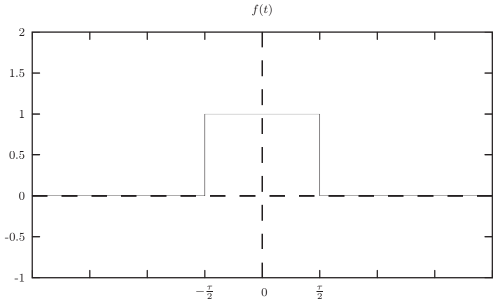
Utilizamos as notações

$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = \alpha(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

para as representações Cartesiana e polar de $F(\omega)$.

Exemplo: Pulso Quadrado

Exemplo: Considere a função



Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t}\,dt = \tau.$

Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t}\,dt = \tau$.

Para $\omega \neq 0$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t}\,dt = \tau$.

Para $\omega \neq 0$:

$$F(\omega) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t}\,dt$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t}\,dt = \tau$.

Para $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \end{aligned}$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t}\,dt = \tau$.

Para $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\omega}\left[\frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2i}\right] \end{aligned}$$

Exemplo: Pulso Quadrado

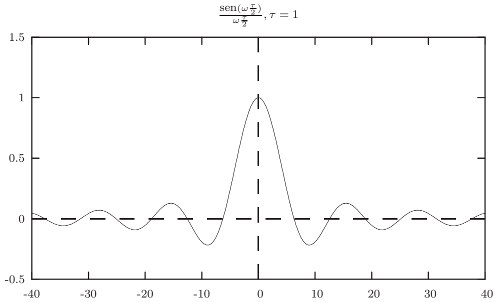
Para $\omega = 0$ temos $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t}\,dt = \tau$.

Para $\omega \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\omega}\left[\frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2i}\right] \\
&= \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega} = \tau\frac{\mathrm{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}}.
\end{aligned}
$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Espectro do pulso quadrado:



Exemplo: Pulso Quadrado

Assim, pela equação de síntese,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \frac{\mathrm{sen}(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{i\omega t} \, d\omega.$$

Exemplo: Pulso Quadrado

Assim, pela equação de síntese,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tau \frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}} e^{i\omega t}\, d\omega.$$

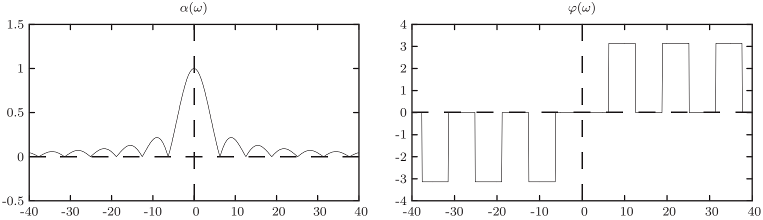
Frequentemente representamos a transformada de Fourier através dos espectros de *amplitude* e *fase*. Neste caso,

$$\alpha(\omega) = \tau \left| \frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}} \right|$$

e

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } F(\omega) \geq 0 \\ \pm\pi, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo: Pulso Quadrado



Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então
$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$
- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então
$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$
- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:

  $A(\omega)$ e $\alpha(\omega)$ são funções pares.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então
$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$
- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:

  $A(\omega)$ e $\alpha(\omega)$ são funções pares. $\quad f_{\text{par}} \longleftrightarrow A(\omega)$.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então
$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$
- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:

  $A(\omega)$ e $\alpha(\omega)$ são funções pares. $\quad f_{\text{par}} \longleftrightarrow A(\omega)$.
  $B(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ são funções ímpares.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$

- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:

$A(\omega)$ e $\alpha(\omega)$ são funções pares. $f_{\text{par}} \longleftrightarrow A(\omega)$.
$B(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ são funções ímpares. $f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB(\omega)$.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade: se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então
$$(\beta f + \gamma g)(t) \longleftrightarrow (\beta F + \gamma G)(\omega).$$
- Conjugação: $F(-\omega) = F^*(\omega)$.
- Simetria:

$A(\omega)$ e $\alpha(\omega)$ são funções pares. $\quad f_{\text{par}} \longleftrightarrow A(\omega)$.
$B(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ são funções ímpares. $\quad f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB(\omega)$.

$f(t)$ é par $\iff$ $F(\omega)$ é real e par.
$f(t)$ é ímpar $\iff$ $F(\omega)$ é imaginária e ímpar.

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Propriedade da Área

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,d\omega = 2\pi f(0).$$

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Propriedade da Área
  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(0);$$
  $$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,d\omega = 2\pi f(0).$$
- Dualidade: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ então

$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega).$$

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Propriedade da Área
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(0);$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,d\omega = 2\pi f(0).$$
- Dualidade: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ então
$$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega).$$
- Mudança de Escala: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\beta \neq 0$ então
$$f(\beta t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\beta|}F(\frac{\omega}{\beta}).$$

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Deslocamento no Tempo: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\tau \in \mathbb{R}$ então

$$f(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau} F(\omega).$$

(Propriedades da Transformada de Fourier)

- Deslocamento no Tempo: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\tau \in \mathbb{R}$ então
$$f(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau}F(\omega).$$
- Deslocamento na Frequência: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$ então
$$e^{i\omega_0 t}f(t) \longleftrightarrow F(\omega-\omega_0).$$

Transformada do limite de funções

Algumas vezes não é possível obter $F(\omega)$ a partir da definição, mas através de limites.

Transformada do limite de funções

Algumas vezes não é possível obter $F(\omega)$ a partir da definição, mas através de limites. Se

$$f(t) = \lim_{k \longrightarrow K} f^k(t),$$

$$f^k(t) \longleftrightarrow F^k(\omega) \quad \text{para cada } k$$

Transformada do limite de funções

Algumas vezes não é possível obter $F(\omega)$ a partir da definição, mas através de limites. Se

$$f(t) = \lim_{k \longrightarrow K} f^k(t),$$

$$f^k(t) \longleftrightarrow F^k(\omega) \quad \text{para cada } k$$

e além disso existe o $\lim_{k \longrightarrow K} F^k(\omega) = F(\omega)$, então este limite $F(\omega)$ corresponde à transformada de Fourier de $f(t)$, possuindo todas as propriedades da transformada obtida pela definição.

Exemplo: Delta de Dirac

Exemplo: Delta de Dirac. Esta função generalizada (distribuição) é definida pelas condições

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \ \forall t \neq 0 \\ \\ \end{cases}$$

Exemplo: Delta de Dirac

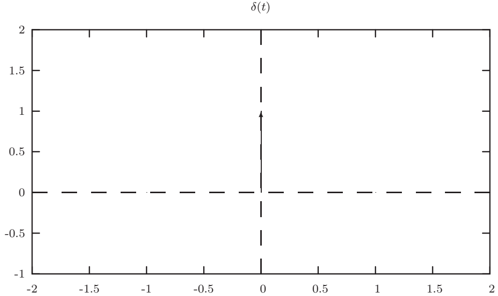
Exemplo: Delta de Dirac. Esta função generalizada (distribuição) é definida pelas condições

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \ \forall t \neq 0 \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \end{cases}$$

sendo que o valor $\delta(0)$ não está definido.

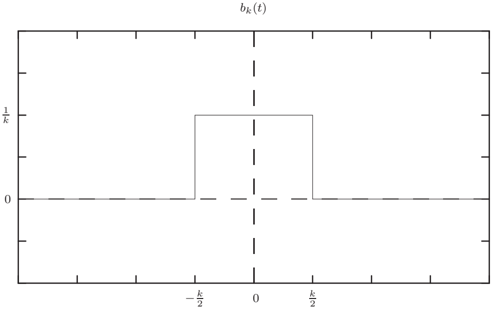
Exemplo: Delta de Dirac

Frequentemente representamos esta distribuição usando um vetor com altura representando seu *peso* (o valor da integral na definição):



Exemplo: Delta de Dirac

O Delta de Dirac pode ser visto como o limite das funções $b_k(t)$ para $k \longrightarrow 0^+$:



Exemplo: Delta de Dirac

Pelo exemplo do pulso quadrado:

$$B_k(\omega) = \frac{1}{k}\left[k\frac{\mathrm{sen}(\omega\frac{k}{2})}{\omega\frac{k}{2}}\right] = \frac{\mathrm{sen}(\omega\frac{k}{2})}{\omega\frac{k}{2}}.$$

Exemplo: Delta de Dirac

Pelo exemplo do pulso quadrado:

$$B_k(\omega) = \frac{1}{k}\left[k\frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{k}{2})}{\omega\frac{k}{2}}\right] = \frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{k}{2})}{\omega\frac{k}{2}}.$$

Quando $k \longrightarrow 0^+$, $B_k(\omega) \longrightarrow 1$ para qualquer valor de ω.

Exemplo: Delta de Dirac

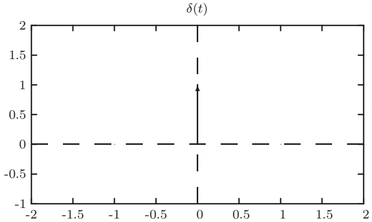
Pelo exemplo do pulso quadrado:

$$B_k(\omega) = \frac{1}{k}\left[k\frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{k}{2})}{\omega\frac{k}{2}}\right] = \frac{\operatorname{sen}(\omega\frac{k}{2})}{\omega\frac{k}{2}}.$$

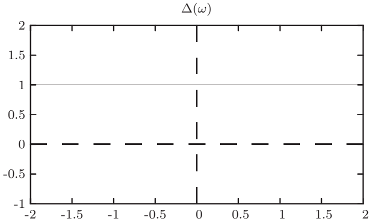
Quando $k \longrightarrow 0^+$, $B_k(\omega) \longrightarrow 1$ para qualquer valor de ω. Assim a transformada de Fourier do Delta de Dirac é a função constante $\Delta(\omega) = 1$, ou ainda,

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$$

Delta de Dirac e seu Espectro



$\longleftrightarrow$



Delta e Exponenciais Complexas

Pela equação de síntese,

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \, d\omega$$

Delta e Exponenciais Complexas

Pela equação de síntese,

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega$$

de onde também obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega = 2\pi\delta(t).$$

Deltas deslocados

Podemos definir deltas de Dirac localizados em instantes $t \neq 0$ e com pesos (valor da integral) diferentes de 1.

Deltas deslocados

Podemos definir deltas de Dirac localizados em instantes $t \neq 0$ e com pesos (valor da integral) diferentes de 1. Em geral definimos $\delta_{K,\tau} = K\delta(t - \tau)$, que satisfaz

$$\begin{cases} \delta_{K,\tau}(t) = 0, \ \forall t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{K,\tau}(t)\, dt = K. \end{cases}$$

Exemplo: Transformada do seno e cosseno

Podemos obter as transformadas do seno e cosseno utilizando as expressões $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$ e $\mathrm{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$.

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

Exemplo: Transformada do seno e cosseno

Podemos obter as transformadas do seno e cosseno utilizando as expressões $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$ e $\operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$.

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad \Longrightarrow \quad \delta(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau} \quad \text{(deslocamento no tempo)}$$

Exemplo: Transformada do seno e cosseno

Podemos obter as transformadas do seno e cosseno utilizando as expressões $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$ e $\operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$.

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad \Longrightarrow \quad \delta(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau} \quad \text{(deslocamento no tempo)}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-it\tau} \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega-\tau) = 2\pi\delta(\omega+\tau) \quad \text{(dualidade)}$$

Exemplo: Transformada do seno e cosseno

Podemos obter as transformadas do seno e cosseno utilizando as expressões $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$ e $\operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$.

$$\begin{array}{ll} \delta(t) \longleftrightarrow 1 & \Longrightarrow \ \delta(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau} \quad \text{(deslocamento no tempo)} \\ & \Longrightarrow \ e^{-it\tau} \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega-\tau) = 2\pi\delta(\omega+\tau) \quad \text{(dualidade)} \\ & \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{i\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \\ e^{-i\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0) \end{array} \right. \end{array}$$

Exemplo: Transformada do seno e cosseno

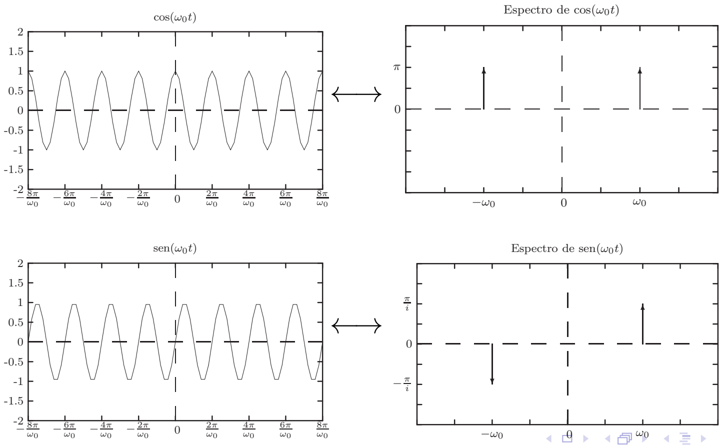
Podemos obter as transformadas do seno e cosseno utilizando as expressões $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}$ e $\mathrm{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}$.

$$
\begin{aligned}
\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad & \Longrightarrow \delta(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-i\omega\tau} \quad \text{(deslocamento no tempo)} \\
& \Longrightarrow e^{-it\tau} \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega-\tau) = 2\pi\delta(\omega+\tau) \quad \text{(dualidade)} \\
& \Longrightarrow \begin{cases} e^{i\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \\ e^{-i\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Logo $\quad \cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$

e $\quad \mathrm{sen}(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{i}\delta(\omega-\omega_0) - \frac{\pi}{i}\delta(\omega+\omega_0)$.

Espectros do Seno e Cosseno



(Propriedade da amostragem)

A propriedade a seguir chama a atenção para o fato de que a função $\delta(t-\tau)$ quando multiplicada por uma função qualquer $f(\cdot)$ preserva (isto é, amostra) somente o valor $f(\tau)$.

(Propriedade da amostragem)

A propriedade a seguir chama a atenção para o fato de que a função $\delta(t-\tau)$ quando multiplicada por uma função qualquer $f(\cdot)$ preserva (isto é, amostra) somente o valor $f(\tau)$.

Teorema: *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\tau \in \mathbb{R}$. *Então*

$$f(t)\delta(t-\tau) = \delta_{f(\tau)}(t-\tau).$$

(Propriedade da amostragem)

A propriedade a seguir chama a atenção para o fato de que a função $\delta(t-\tau)$ quando multiplicada por uma função qualquer $f(\cdot)$ preserva (isto é, amostra) somente o valor $f(\tau)$.

Teorema: *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\tau \in \mathbb{R}$. *Então*

$$f(t)\delta(t-\tau) = \delta_{f(\tau)}(t-\tau).$$

Em particular,

$$f(t)\delta(t) = \delta_{f(0)}(t).$$

(Propriedade da amostragem)

A propriedade a seguir chama a atenção para o fato de que a função $\delta(t-\tau)$ quando multiplicada por uma função qualquer $f(\cdot)$ preserva (isto é, amostra) somente o valor $f(\tau)$.

Teorema: *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\tau \in \mathbb{R}$. *Então*

$$f(t)\delta(t-\tau) = \delta_{f(\tau)}(t-\tau).$$

Em particular,

$$f(t)\delta(t) = \delta_{f(0)}(t).$$

Prova: notas de aula sobre Fourier.

Convolução

A convolução surge como resposta à seguinte pergunta:

se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$,
qual é a função $h(t)$ *cujo espectro é* $F(\omega)G(\omega)$,
ou ainda, tal que $h(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$?

Convolução

A convolução surge como resposta à seguinte pergunta:

> *se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$,
> *qual é a função* $h(t)$ *cujo espectro é* $F(\omega)G(\omega)$,
> *ou ainda, tal que* $h(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$*?*

Definição: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$, a **convolução** de f e g é definida por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Teorema da Convolução

Teorema: *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ *então*

$$h(t) = (f * g)(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

Teorema da Convolução

Teorema: *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ *então*

$$h(t) = (f * g)(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

Prova: Analisando a função $h(t) = (f * g)(t)$ temos

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

Teorema da Convolução

Teorema: *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ *então*

$$h(t) = (f * g)(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

Prova: Analisando a função $h(t) = (f * g)(t)$ temos

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-i\omega t}\,dt$$

Teorema da Convolução

Teorema: *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ *então*

$$h(t) = (f * g)(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

Prova: Analisando a função $h(t) = (f * g)(t)$ temos

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right] e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right] dt \end{aligned}$$

Teorema da Convolução

Teorema: *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ *então*

$$h(t) = (f * g)(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

Prova: Analisando a função $h(t) = (f * g)(t)$ temos

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right] e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}\,dt\right] f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \end{aligned}$$

Teorema da Convolução

Teorema: *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ *então*

$$h(t) = (f * g)(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

Prova: Analisando a função $h(t) = (f * g)(t)$ temos

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right]dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}\,dt\right]f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau
\end{aligned}$$

Teorema da Convolução

Teorema: *Se* $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ *e* $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ *então*

$$h(t) = (f * g)(t) \longleftrightarrow H(\omega) = F(\omega)G(\omega).$$

Prova: Analisando a função $h(t) = (f * g)(t)$ temos

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right] e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}\,dt\right] f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau = G(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau = F(\omega)G(\omega). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Simetria da Convolução

Observe que a operação de convolução é simétrica, pois

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Simetria da Convolução

Observe que a operação de convolução é simétrica, pois

$$
\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} f(t-\zeta) g(\zeta)\, (-d\zeta) \quad (\zeta = t - \tau)
\end{aligned}
$$

Simetria da Convolução

Observe que a operação de convolução é simétrica, pois

$$
\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} f(t-\zeta) g(\zeta)\, (-d\zeta) \quad (\zeta = t - \tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\zeta) g(\zeta)\, d\zeta
\end{aligned}
$$

Simetria da Convolução

Observe que a operação de convolução é simétrica, pois

$$
\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} f(t-\zeta)g(\zeta)\,(-d\zeta) \quad (\zeta = t-\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\zeta)g(\zeta)\,d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau
\end{aligned}
$$

Simetria da Convolução

Observe que a operação de convolução é simétrica, pois

$$
\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} f(t-\zeta)g(\zeta)\,(-d\zeta) \quad (\zeta = t-\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\zeta)g(\zeta)\,d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau \\
&= (g * f)(t).
\end{aligned}
$$

Convolução e Amostragem

Exemplo: Lembrando da propriedade da amostragem

$$f(t)\delta(t-\tau) = \delta_{f(\tau)}(t-\tau) = f(\tau)\delta(t-\tau),$$

Convolução e Amostragem

Exemplo: Lembrando da propriedade da amostragem

$$f(t)\delta(t-\tau) = \delta_{f(\tau)}(t-\tau) = f(\tau)\delta(t-\tau),$$

temos que

$$(f*\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,d\tau,$$

Convolução e Amostragem

Exemplo: Lembrando da propriedade da amostragem

$$f(t)\delta(t-\tau) = \delta_{f(\tau)}(t-\tau) = f(\tau)\delta(t-\tau),$$

temos que

$$(f*\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,d\tau,$$

e como $f(t)$ não depende de τ na última integral,

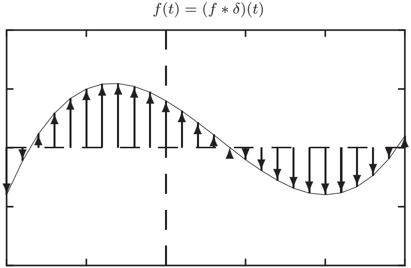
$$(f*\delta)(t) = f(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau = f(t).$$

Convolução e Amostragem

Disso concluimos que $\delta(t)$ é o elemento neutro em relação à convolução

Convolução e Amostragem

Disso concluimos que $\delta(t)$ é o elemento neutro em relação à convolução, e também que $f(t)$ pode ser vista como uma soma de deltas deslocados $(\delta_{f(\tau)}(t-\tau))$:



Interpretação Geométrica da Convolução

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer, e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(t - \gamma_n)$.

Interpretação Geométrica da Convolução

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer, e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(t - \gamma_n)$.

Então, usando a propriedade da amostragem,

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau)\, d\tau$$

Interpretação Geométrica da Convolução

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer, e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(t - \gamma_n)$.

Então, usando a propriedade da amostragem,

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(\tau - \gamma_n) \right) d\tau$$

Interpretação Geométrica da Convolução

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer, e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(t - \gamma_n)$.

Então, usando a propriedade da amostragem,

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(\tau - \gamma_n) \right) d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau \right)\end{aligned}$$

Interpretação Geométrica da Convolução

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer, e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(t - \gamma_n)$.

Então, usando a propriedade da amostragem,

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(\tau - \gamma_n) \right) d\tau \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\gamma_n) \delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau \right)
\end{aligned}$$

Interpretação Geométrica da Convolução

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer, e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(t - \gamma_n)$.

Então, usando a propriedade da amostragem,

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(\tau - \gamma_n) \right) d\tau \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\gamma_n) \delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n f(t-\gamma_n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau
\end{aligned}$$

Interpretação Geométrica da Convolução

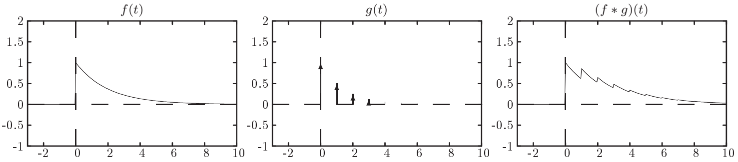
Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer, e $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(t - \gamma_n)$.

Então, usando a propriedade da amostragem,

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta(\tau - \gamma_n) \right) d\tau \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\gamma_n) \delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n f(t-\gamma_n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \gamma_n)\, d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n f(t-\gamma_n).
\end{aligned}$$

Interpretação Geométrica da Convolução

Ou seja, $(f * g)$ corresponde ao somatório de várias cópias da função $f(t)$ com fatores de escala β_n e deslocadas no tempo de γ_n:



Convolução na frequência

Teorema: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ então

$$h(t) = f(t)g(t) \longleftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega).$$

Convolução na frequência

Teorema: Se $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ e $g(t) \longleftrightarrow G(\omega)$ então

$$h(t) = f(t)g(t) \longleftrightarrow H(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega).$$

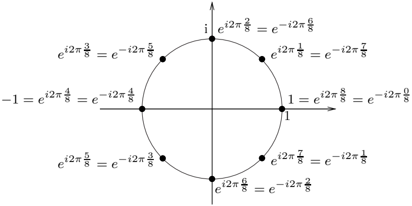
Prova: Exercício sugerido.

Raizes Complexas da Unidade

Dado $N \in \mathbb{N}$, considere a família de números complexos

$$\left\{ e^{i2\pi q \frac{1}{N}} \;\middle|\; q = 0, 1, \ldots, N-1 \right\},$$

que divide o círculo unitário em N partes iguais:



Exponenciais Complexas Discretas

Vamos verificar que a família de funções

$$f_q(k) = e^{i2\pi q \frac{k}{N}}, \ \ q, k \in \{0, \ldots, N-1\}$$

Exponenciais Complexas Discretas

Vamos verificar que a família de funções

$$f_q(k) = e^{i2\pi q \frac{k}{N}}, \;\; q, k \in \{0, \ldots, N-1\}$$

é ortogonal em relação ao produto interno em $\mathbb{C}^N$ definido por $\langle a, b \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^*$.

Exponenciais Complexas Discretas

Vamos verificar que a família de funções

$$f_q(k) = e^{i2\pi q \frac{k}{N}}, \;\; q, k \in \{0, \ldots, N-1\}$$

é ortogonal em relação ao produto interno em $\mathbb{C}^N$ definido por

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^*.$$

Para simplificar a notação, vamos utilizar o símbolo $W = e^{i2\pi \frac{1}{N}}$ de tal forma que

$$(W^q)^k = W^{qk} = e^{i2\pi q \frac{k}{N}} = f_q(k).$$

Relações de Ortogonalidade

$$f_q(\cdot) \perp f_r(\cdot), \ \forall q \neq r$$

e

$$\|f_q\|^2 = N.$$

Relações de Ortogonalidade

$$f_q(\cdot) \perp f_r(\cdot), \ \forall q \neq r$$

e

$$\|f_q\|^2 = N.$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{rk})^* = \begin{cases} 0, & \text{se } q \neq r \\ N, & \text{se } q = r. \end{cases}$$

Exemplo:

Considere $N = 5$, $q = 2$ e $r = 3$. Então, para os vetores

$$a = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^2 \\ W^4 \\ W^6 \\ W^8 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^3 \\ W^6 \\ W^9 \\ W^{12} \end{bmatrix}$$

temos $\langle a, b \rangle = W^0 W^0 + W^2 W^{-3} + W^4 W^{-6} + W^6 W^{-9} 9 + W^8 W^{-12} =$
$1 + W^{-1} + W^{-2} + W^{-3} + W^{-4} = 0$

e

$\langle a, a \rangle = W^0 W^0 + W^2 W^{-2} + W^4 W^{-4} + W^6 W^{-6} + W^8 W^{-8} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{rk})^*$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{rk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{rk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1-(W^{(q-r)})^N}{1-W^{(q-r)}}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1-(W^{(q-r)})^N}{1-W^{(q-r)}} \\ &= \frac{1-(W^N)^{(q-r)}}{1-W^{(q-r)}}\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1}(W^{(q-r)})^k = \frac{1-(W^{(q-r)})^N}{1-W^{(q-r)}} \\ &= \frac{1-(W^N)^{(q-r)}}{1-W^{(q-r)}} = \frac{1-1}{1-W^{(q-r)}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1}(W^{(q-r)})^k = \frac{1-(W^{(q-r)})^N}{1-W^{(q-r)}} \\ &= \frac{1-(W^N)^{(q-r)}}{1-W^{(q-r)}} = \frac{1-1}{1-W^{(q-r)}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{qk})^*$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{rk})^* \quad &= \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1-(W^{(q-r)})^N}{1-W^{(q-r)}} \\
&= \frac{1-(W^N)^{(q-r)}}{1-W^{(q-r)}} = \frac{1-1}{1-W^{(q-r)}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{qk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (W^0)^k$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1-(W^{(q-r)})^N}{1-W^{(q-r)}} \\
&= \frac{1-(W^N)^{(q-r)}}{1-W^{(q-r)}} = \frac{1-1}{1-W^{(q-r)}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk}(W^{qk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (W^0)^k = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N. \quad \blacksquare$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Seja $f = (f_0, \dots, f_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$. Vamos tentar encontrar um vetor $F = (F_0, \dots, F_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i 2\pi k \frac{n}{N}}.$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Seja $f = (f_0, \ldots, f_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$. Vamos tentar encontrar um vetor $F = (F_0, \ldots, F_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}.$$

Usando as relações de ortogonalidade, podemos obter os valores de F_n tomando o produto interno de f pela exponencial complexa $f_q(\cdot)$.

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m\frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}\right) e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m\frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}\right) e^{-i2\pi m\frac{k}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi n\frac{k}{N}} e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}\right)
\end{aligned}
$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m\frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}\right) e^{-i2\pi m\frac{k}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi n\frac{k}{N}} e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}\right) \\
&= \frac{1}{N} F_m N.
\end{aligned}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m\frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k\frac{n}{N}}\right) e^{-i2\pi m\frac{k}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi n\frac{k}{N}} e^{-i2\pi m\frac{k}{N}}\right) \\
&= \frac{1}{N} F_m N.
\end{aligned}$$

ou seja, para $n = 0, \ldots, N-1$, $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n\frac{k}{N}}$.

Síntese e Análise

As equações $f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ e $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são chamadas de **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente.

Síntese e Análise

As equações $f_k = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ e $F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são chamadas de **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente. Representamos esta relação por $(f_0, \ldots, f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_0, \ldots, F_{N-1})$ ou simplesmente $f \longleftrightarrow F$.

Síntese e Análise

As equações $f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ e $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são chamadas de **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente. Representamos esta relação por $(f_0, \ldots, f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_0, \ldots, F_{N-1})$ ou simplesmente $f \longleftrightarrow F$.

Utilizamos as notações $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ para as representações Cartesiana e polar de F_n.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Linearidade: se $f \longleftrightarrow F$, $g \longleftrightarrow G$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$\beta f + \gamma g \longleftrightarrow \beta F + \gamma G.$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Linearidade: se $f \longleftrightarrow F$, $g \longleftrightarrow G$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então
$$\beta f + \gamma g \longleftrightarrow \beta F + \gamma G.$$
- Periodicidade:
As funções $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas pelas expressões $f(k) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ e $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são periódicas com período N.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Linearidade: se $f \longleftrightarrow F$, $g \longleftrightarrow G$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$\beta f + \gamma g \longleftrightarrow \beta F + \gamma G.$$

- Periodicidade:
  As funções $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas pelas expressões $f(k) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ e $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são periódicas com período N.
- Propriedade da Média: $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f_k = F_0$ e $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} F_n = f_0$.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Conjugação: $F_{-n} = F_n^*$.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Conjugação: $F_{-n} = F_n^*$.
- Simetria:
  A_n e α_n são funções pares.
  B_n e φ_n são funções ímpares.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Conjugação: $F_{-n} = F_n^*$.
- Simetria:
  A_n e α_n são funções pares. $\quad f_{\text{par}} \longleftrightarrow A_n$.
  B_n e φ_n são funções ímpares. $\quad f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB_n$.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Conjugação: $F_{-n} = F_n^*$.
- Simetria:
  A_n e α_n são funções pares. $f_{\text{par}} \longleftrightarrow A_n$.
  B_n e φ_n são funções ímpares. $f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB_n$.

  $f(t)$ é par $\iff$ F_n é real e par.
  $f(t)$ é ímpar $\iff$ F_n é imaginária e ímpar.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Dualidade: Se $f \longleftrightarrow F$ então

$$F \longleftrightarrow N(f_0, f_{-1}, f_{-2} \ldots, f_{-(N-1)}).$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Dualidade: Se $f \longleftrightarrow F$ então

$$F \longleftrightarrow N(f_0, f_{-1}, f_{-2} \dots, f_{-(N-1)}).$$

- Deslocamento no Tempo: Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(f_{-m}, f_{1-m}, \dots, f_{N-1-m}) \longleftrightarrow (W^0 F_0, W^m F_1, W^{2m} F_2, \dots, W^{(N-1)m} F_{N-1}).$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Dualidade: Se $f \longleftrightarrow F$ então

$$F \longleftrightarrow N(f_0, f_{-1}, f_{-2} \ldots, f_{-(N-1)}).$$

- Deslocamento no Tempo: Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(f_{-m}, f_{1-m}, \ldots, f_{N-1-m}) \longleftrightarrow (W^0 F_0, W^m F_1, W^{2m} F_2, \ldots, W^{(N-1)m} F_{N-1}).$$

- Deslocamento na Frequência: Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(W^0 f_0, W^m f_1, W^{2m} f_2, \ldots, W^{(N-1)m} f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_m, f_{1+m}, \ldots, f_{N-1+m}).$$

Custo Computacional da DFT

O método direto de cálculo da transformada discreta de Fourier a partir da expressão

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{-kn}, \;\; n = 0, \ldots, N-1$$

utiliza N^2 produtos entre números complexos e $N(N-1)$ somas, possuindo assim complexidade computacional $\mathcal{O}(N^2)$.

Custo Computacional da DFT

O método direto de cálculo da transformada discreta de Fourier a partir da expressão

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{-kn}, \;\; n = 0, \dots, N-1$$

utiliza N^2 produtos entre números complexos e $N(N-1)$ somas, possuindo assim complexidade computacional $\mathcal{O}(N^2)$.
O método FFT (Fast Fourier Transform) permite obter o mesmo resultado em tempo $\mathcal{O}(N \log N)$.

Método Recursivo para a DFT

A ideia simples do cálculo da DFT por recursão reside em considerar $N = 2^B$ e particionar o vetor $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ em duas partes:

$$f_{\text{par}} = (f_0, f_2, \ldots, f_{N-2})$$

e

$$f_{\text{ímpar}} = (f_1, f_3, \ldots, f_{N-1})$$

Método Recursivo para a DFT

A ideia simples do cálculo da DFT por recursão reside em considerar $N = 2^B$ e particionar o vetor $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ em duas partes:

$$f_{\text{par}} = (f_0, f_2, \ldots, f_{N-2})$$

e

$$f_{\text{ímpar}} = (f_1, f_3, \ldots, f_{N-1})$$

e calcular separadamente as DFTs de cada um destes vetores, combinando os resultados.

Divisão e Conquista

Note que $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$

Divisão e Conquista

Note que
$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\ &= \sum_{k \text{ par}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{k \text{ ímpar}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \end{aligned}$$

Divisão e Conquista

Note que
$$
\begin{aligned}
F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
&= \sum_{k \text{ par}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{k \text{ ímpar}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
&= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{-i2\pi n \frac{2k}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-i2\pi n \frac{2k+1}{N}}
\end{aligned}
$$

Divisão e Conquista

Note que

$$
\begin{aligned}
F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
&= \sum_{k \text{ par}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{k \text{ ímpar}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
&= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{-i2\pi n \frac{2k}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-i2\pi n \frac{2k+1}{N}} \\
&= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{par}\,k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{ímpar}\,k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}}
\end{aligned}
$$

Divisão e Conquista

Note que

$$
\begin{aligned}
F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
&= \sum_{k \text{ par}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{k \text{ ímpar}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
&= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{-i2\pi n \frac{2k}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-i2\pi n \frac{2k+1}{N}} \\
&= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{par}\,k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{ímpar}\,k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} \\
&= \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{ímpar}})_n
\end{aligned}
$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \mathrm{FFT}(f_{\mathrm{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \mathrm{FFT}(f_{\mathrm{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). Temos

$$C(N) = 2C(N/2) + \alpha N$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \mathrm{FFT}(f_{\mathrm{par}})_n + e^{-i2\pi n\frac{1}{N}}\mathrm{FFT}(f_{\mathrm{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned} C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\ &= 2\left(2C(N/4) + \alpha N/2\right) + \alpha N \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n\frac{1}{N}}\text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned} C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\ &= 2\left(2C(N/4) + \alpha N/2\right) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \mathrm{FFT}(f_{\mathrm{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \mathrm{FFT}(f_{\mathrm{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned} C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\ &= 2\left(2C(N/4) + \alpha N/2\right) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\ &= 4\left(2C(N/8) + \alpha N/4\right) + 2\alpha N \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \mathrm{FFT}(f_{\mathrm{par}})_n + e^{-i2\pi n\frac{1}{N}}\mathrm{FFT}(f_{\mathrm{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned} C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\ &= 2\left(2C(N/4) + \alpha N/2\right) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\ &= 4\left(2C(N/8) + \alpha N/4\right) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned} C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\ &= 2\left(2C(N/4) + \alpha N/2\right) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\ &= 4\left(2C(N/8) + \alpha N/4\right) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\ &= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \mathrm{FFT}(f_{\mathrm{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \mathrm{FFT}(f_{\mathrm{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned}
C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
&= 2\left(2C(N/4) + \alpha N/2\right) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
&= 4\left(2C(N/8) + \alpha N/4\right) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\
&= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N \\
&= 2^4 C(N/2^4) + 4\alpha N
\end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned}
C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
&= 2\left(2C(N/4) + \alpha N/2\right) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
&= 4\left(2C(N/8) + \alpha N/4\right) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\
&= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N \\
&= 2^4 C(N/2^4) + 4\alpha N \\
&= \cdots \\
&= 2^B C(N/2^B) + B\alpha N
\end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \mathrm{FFT}(f_{\mathrm{par}})_n + e^{-i2\pi n\frac{1}{N}}\mathrm{FFT}(f_{\mathrm{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned}
C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\
&= 2\left(2C(N/4) + \alpha N/2\right) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\
&= 4\left(2C(N/8) + \alpha N/4\right) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\
&= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N \\
&= 2^4 C(N/2^4) + 4\alpha N \\
&= \cdots \\
&= 2^B C(N/2^B) + B\alpha N \\
&= NC(1) + B\alpha N \\
&= \mathcal{O}(N \log N)
\end{aligned}$$