A Condição de Compatibilidade para Equações Diferenciais ELípticas com Condições de Fronteira Neumann

Priscila Cardoso Calegari

Universidade de São Paulo
Matemática Aplicada - IME

São Paulo, Setembro de 2008

$$\text{Modelo:} \quad \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \\ \\ \frac{\partial u(x)}{\partial \eta} = g(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

- Se u é solução então $u + \kappa$ também é solução.
- Condições sobre f e g. **Condição Compatibilidade.**
- Teorema de Gauss:

$$\int_\Omega \Delta u d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \eta} u ds$$

$$\Downarrow$$

$$-\int_\Omega f d\Omega = \int_{\partial\Omega} g ds \tag{2}$$

- **Objetivo:** Resolver 1 numericamente.
- **Discretização:** Diferenças finitas de segunda ordem. Com $\Delta x = \Delta y = h$.

$$-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j} \tag{3}$$

- **E condições de fronteiras:** Segunda ordem.

$$\begin{aligned}
-\frac{u_{1,j}-u_{-1,j}}{2h} &= g_{0,j} \quad \text{e} \quad \frac{u_{M+1,j}-u_{M-1,j}}{2h} = g_{M,j} \quad 0 \leq j \leq N. \\
-\frac{u_{i,1}-u_{i,-1}}{2h} &= g_{i,0} \quad \text{e} \quad \frac{u_{i,N+1}-u_{i,N-1}}{2h} = g_{i,N} \quad 0 \leq i \leq M.
\end{aligned} \tag{4}$$

Aproximação de segunda ordem para as Condições de Fronteira:

$$Au = b \tag{5}$$

$$A = \begin{bmatrix} T & -2I & & & & \\ -I & T & -I & & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & & & & \\ & & & -I & T & -I \\ & & & & -2I & T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Com $b = f + u_x + u_y$ e I identidade.

$$u = [u_{00}\ u_{10}\ \dots\ u_{M0}\ \dots\ u_{MN}]^T$$

$$f = h^2[f_{00}\ f_{10}\ \dots\ f_{M0}\ \dots\ f_{MN}]^T$$

$$u_x = 2h[g_{00}\ 0\dots\ 0\ g_{M0}\ g_{01}\ 0\dots\ 0\ g_{MN}]^T$$

$$u_y = 2h[g_{00}\ \dots\ g_{M0}\ 0\dots\ 0\ g_{0N}\ \dots\ g_{MN}]^T$$

Discretização: Diferenças Finitas de Segunda Ordem.

$$-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j} \tag{6}$$

Condições de fronteiras: Primeira ordem.

$$\begin{aligned}
&-\frac{u_{1,j}-u_{0,j}}{h} = g_{0,j}\\
&\frac{u_{M,j}-u_{M-1,j}}{h} = g_{M,j}\\
&-\frac{u_{i,1}-u_{i,0}}{h} = g_{i,0}\\
&\frac{u_{i,N}-u_{i,N-1}}{h} = g_{i,N}
\end{aligned} \tag{7}$$

Aproximação de primeira ordem para as Condições de Fronteira: com $\Delta x = \Delta y = h$

$$Au = b \tag{8}$$

$$A = \begin{bmatrix} T_1 & -I & & & & & \\ -I & T & -I & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & & -I & T & -I \\ & & & & -I & T_1 \end{bmatrix} \quad T_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 3 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 3 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Variáveis Centradas:

Diferenças Finitas: Segunda ordem.

Condições de Fronteira: Segunda ordem.

$$-\frac{u_{0,j}-u_{-1,j}}{h} = g_{\frac{1}{2},j}$$

$$\frac{u_{M+1,j}-u_{M,j}}{h} = g_{M+\frac{1}{2},j}$$

$$-\frac{u_{i,0}-u_{i,-1}}{h} = g_{i,\frac{1}{2}}$$

$$\frac{u_{i,N+1}-u_{i,N}}{h} = g_{i,N+\frac{1}{2}}$$

Aproximação de segunda ordem para as Condições de Fronteira, com $\Delta x \neq \Delta y$:

$$A = \begin{bmatrix} T & -\frac{2}{\Delta y^2} I & & & & \\ -\frac{1}{\Delta y^2} I & T & -\frac{1}{\Delta y^2} I & & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & & & & \\ & & & -\frac{1}{\Delta y^2} I & T & -\frac{1}{\Delta y^2} I \\ & & & & -\frac{2}{\Delta y^2} I & T \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right) & -\frac{2}{\Delta x^2} & & & & \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right) & -\frac{1}{\Delta x^2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & -\frac{1}{\Delta x^2} & \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right) & -\frac{1}{\Delta x^2} \\ & & & & -\frac{2}{\Delta x^2} & \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right) \end{bmatrix}$$

- J. W. Thomas. **Numerical Partial Differential Equations.** Springer-Verlag, 1995.
- R. A. Horn, C. R. Johnson. **Matrix Analysis.** Cambridge University Press, 1985.
- W. Hackbusch. **Elliptic Differential Equations.** Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- S. R. M. Barros, Multigrid Methods for Two - and Three - Dimensional Poisson - Type Equatios on the Sphere, *Journal of Computational Physics*, **92 No. 2** (1991), 313-348.