Resumo

- Parte I
  - A equação do calor
  - Comportamento do erro em métodos de relaxação

- Parte II
  - Método *Multigrid*
  - Aplicações

Resumo

- Parte I
  - A equação do calor
  - Comportamento do erro em métodos de relaxação
- Parte II
  - Método *Multigrid*
  - Aplicações

A equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\nabla^2 u + f \quad \text{em} \quad \Omega \qquad\qquad c \geqslant 0$$

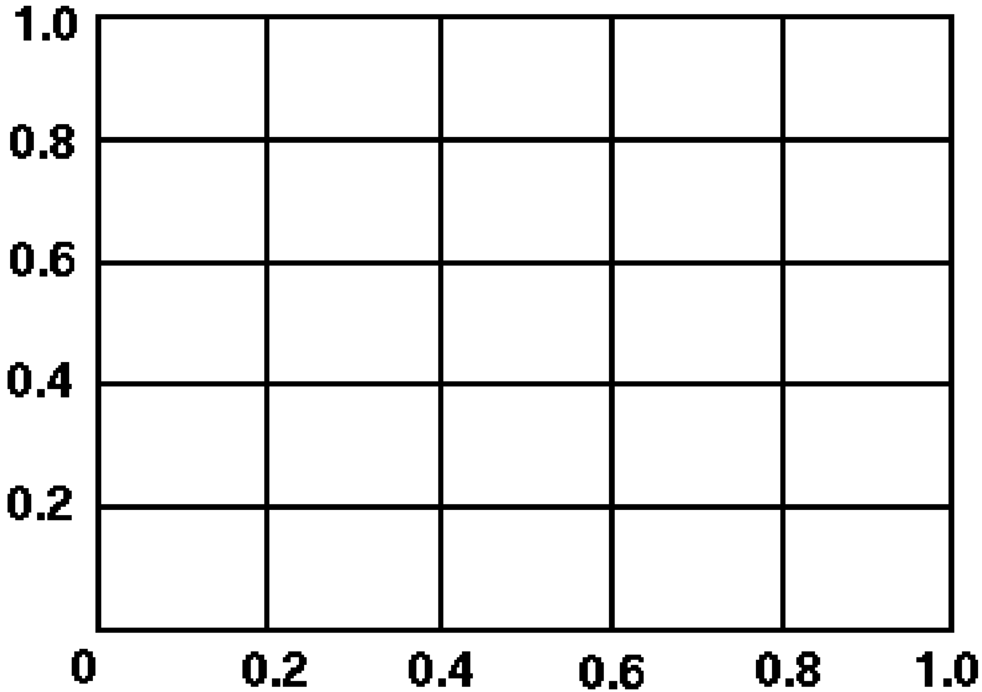
onde:

$$u = u(x, y, t), \; f = f(x, y, t), \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

com condições de contorno e inicial definidas.

A equação do calor (discretização)

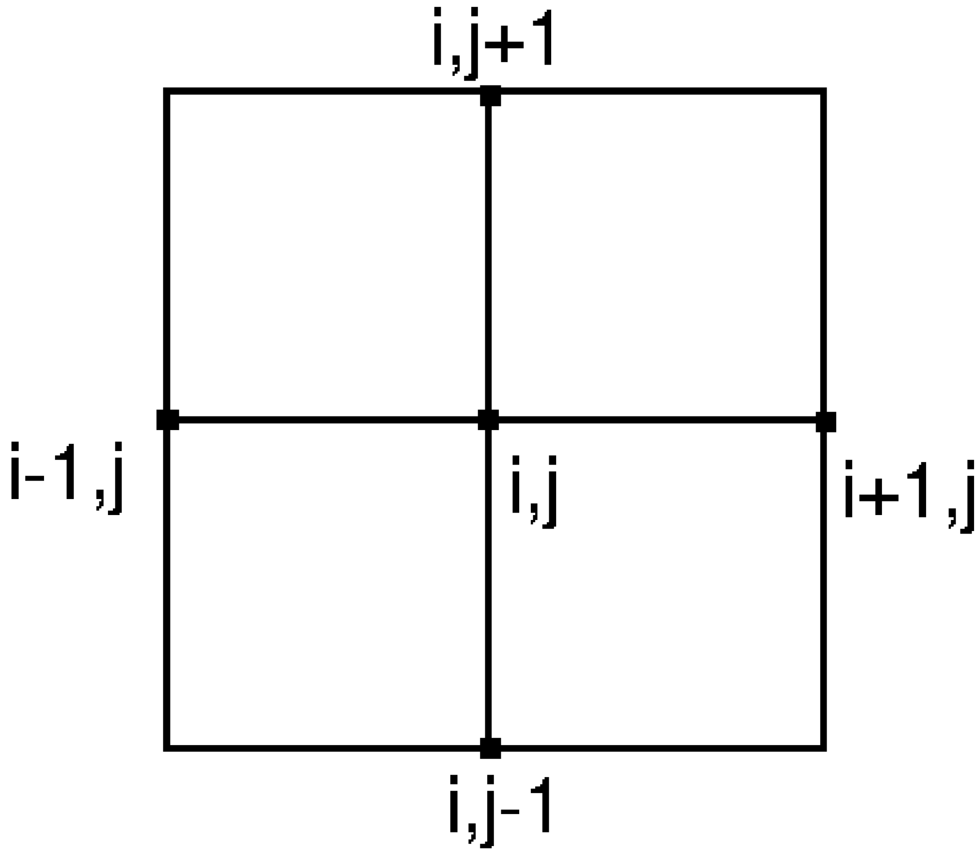
- Exemplo de malha espacial: $\Omega^h = [0,1] \times [0,1]$



$x \in [0,1] \quad y \in [0,1]$

$\Delta x = \Delta y = h = 0{,}2$

A equação do calor (discretização)



A equação do calor (discretização)

Expandindo em série de Taylor:

$$f(x+\Delta x, y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + O(\Delta x^2)$$

$$f(x-\Delta x, y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(-\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\Delta x)^2 + O(\Delta x^2)$$

A equação do calor (discretização)

Expandindo em série de Taylor:

$$f(x+\Delta x, y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + O(\Delta x^2)$$

$$+$$

$$f(x-\Delta x, y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(-\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\Delta x)^2 + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i-1,j} - 2\mathrm{f}_{i,j} + f_{i+1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

A equação do calor (discretização)

Utilizando o método de Euler Implícito [1] e diferenças finitas de segunda ordem no espaço temos:

$$\frac{v_{ij}^{n+1}-v_{ij}^{n}}{\Delta t}=c\left(\frac{v_{i-1,j}^{n+1}-2v_{i,j}^{n+1}+v_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{v_{i,j-1}^{n+1}-2v_{i,j}^{n+1}+v_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)+f_{ij}^{n+1} \quad (1)$$

A equação do calor (discretização)

Utilizando o método de Euler Implícito [1] e diferenças finitas de segunda ordem no espaço temos:

$$\frac{v_{ij}^{n+1}-v_{ij}^{n}}{\Delta t}=c\left(\frac{v_{i-1,j}^{n+1}-2v_{i,j}^{n+1}+v_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{v_{i,j-1}^{n+1}-2v_{i,j}^{n+1}+v_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)+f_{ij}^{n+1} \quad (1)$$

$$Av=b \quad (1)$$

A é simétrica e tridiagonal em blocos

O método é incondicionalmente estável

Resumo da apresentação

- Parte I
  - A equação do calor
  - Comportamento do erro em métodos de relaxação
- Parte II
  - Método *Multigrid*
  - Aplicações

Comportamento do erro em métodos de relaxação

- Usualmente, ao utilizar métodos iterativos (eg. Gauss-Seidel, Jacobi) para resolver sistemas lineares, percebe-se que o erro tende a “estagnar” após um dado número de iterações

Comportamento do erro em métodos de relaxação

$$-u''(x)=0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0)=u(1)=0.$$

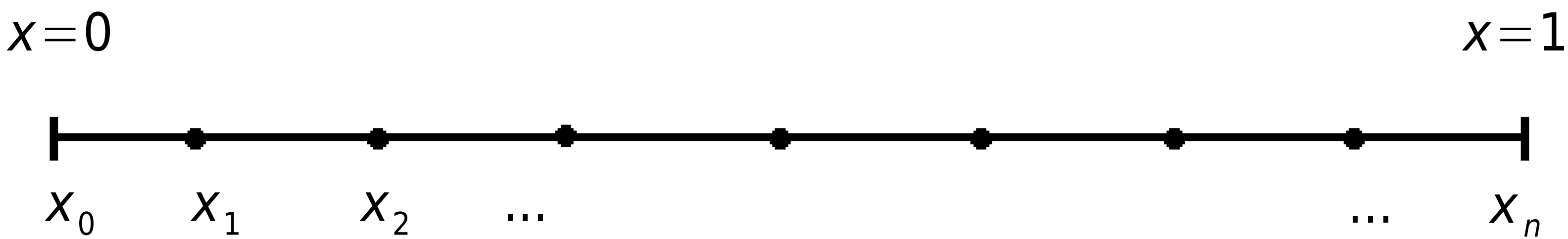
Comportamento do erro em métodos de relaxação

$$-u''(x)=0, \quad 0<x<1, \qquad \rightarrow \qquad -u_{j-1}+2u_j-u_{j+1}=0, \quad 1\leqslant j\leqslant n-1,$$
$$u(0)=u(1)=0. \qquad\qquad u_0=u_n=0$$

Comportamento do erro em métodos de relaxação

$$-u'(x)=0, \quad 0 < x < 1, \qquad \rightarrow \qquad -u_{j-1}+2\mathrm{u}_j-u_{j+1}=0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1,$$

$$u(0)=u(1)=0. \qquad\qquad u_0=u_n=0$$



Comportamento do erro em métodos de relaxação

$$v_j = sen\left(\frac{jk\pi}{n}\right), \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

onde ***k*** é chamado *wavenumber*, ou frequência e indica a metade do número de períodos da função seno no domínio do problema.

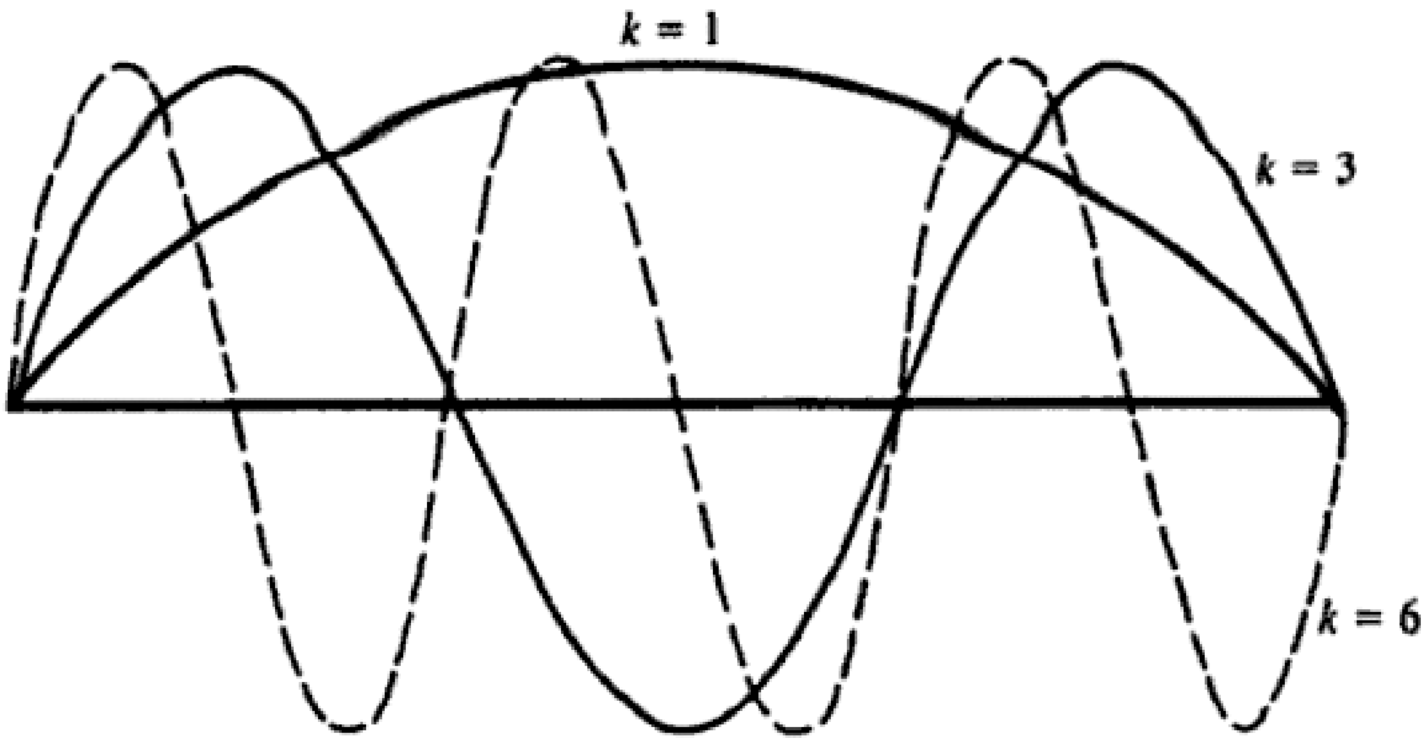
Comportamento do erro em métodos de relaxação

$$v_j = sen\left(\frac{jk\pi}{n}\right), \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

onde k é chamado *wavenumber,* ou frequência e indica a metade do número de períodos da função seno no domínio do problema.

$$\vec{v}_k = \left[sen(0), sen\left(\frac{k\pi}{n}\right), sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \ldots, sen\left(\frac{nk\pi}{n}\right)\right]^T, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

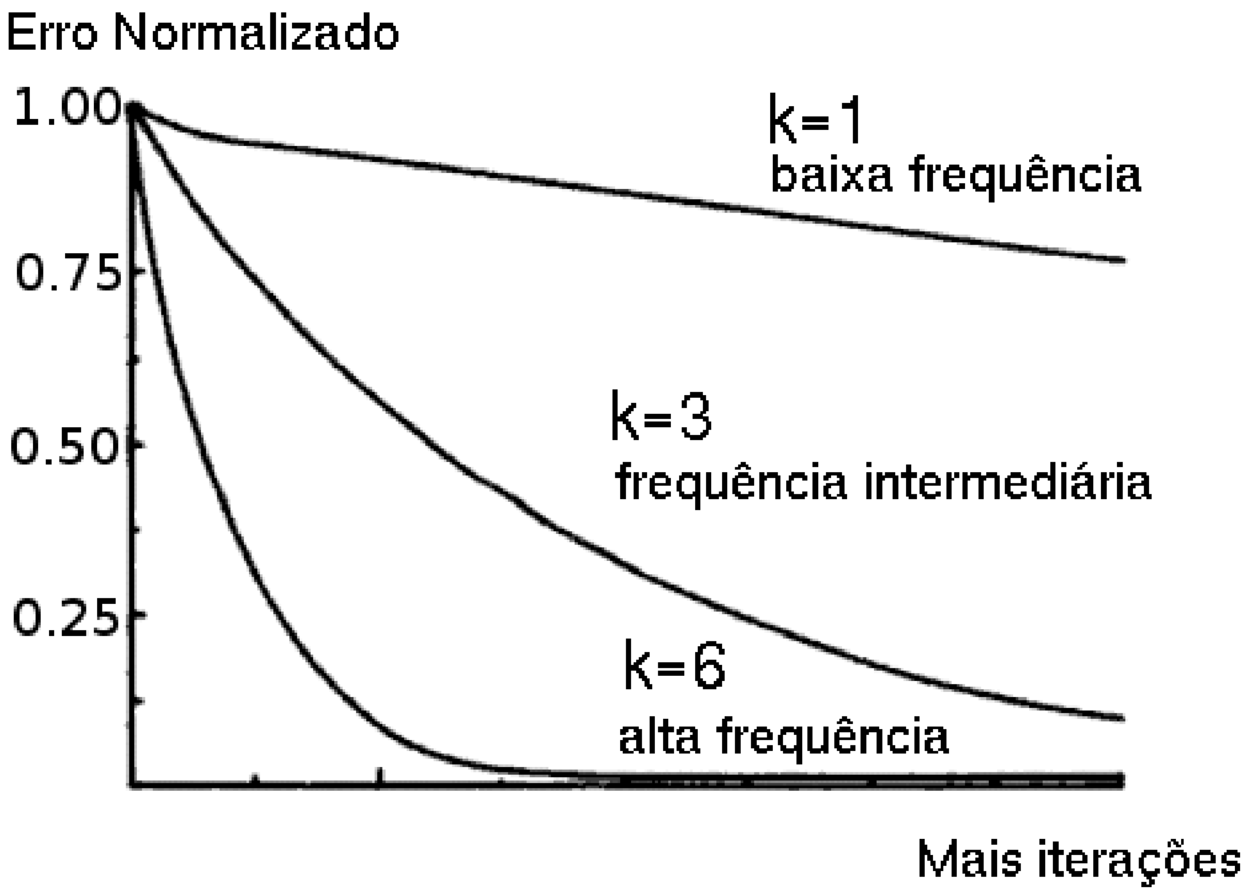
Comportamento do erro em métodos de relaxação



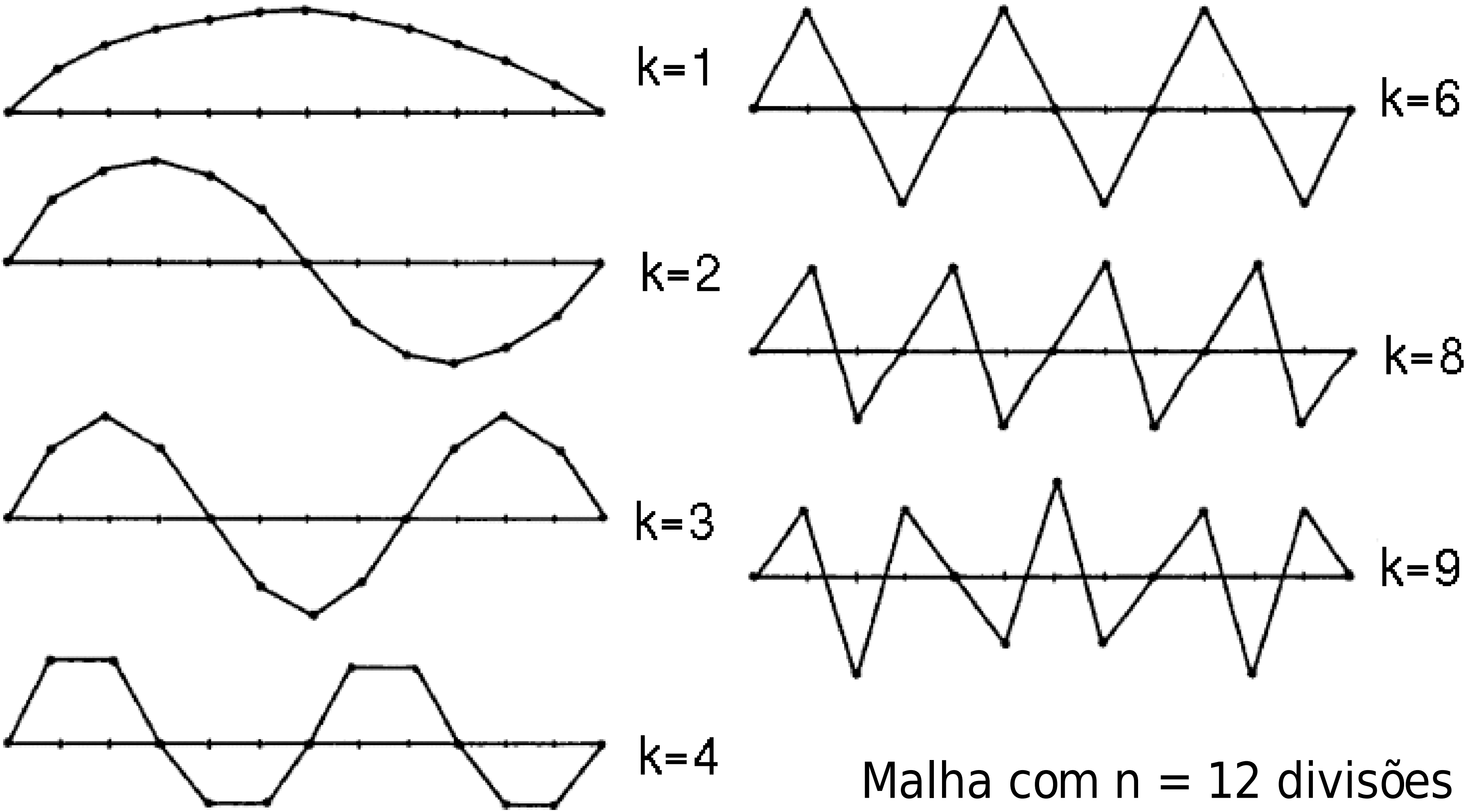
Comportamento do erro em métodos de relaxação

- Os métodos de relaxação em geral suavizam apenas os componentes de alta frequência do erro, deixando os de baixa frequência praticamente inalterados.

Comportamento do erro em métodos de relaxação

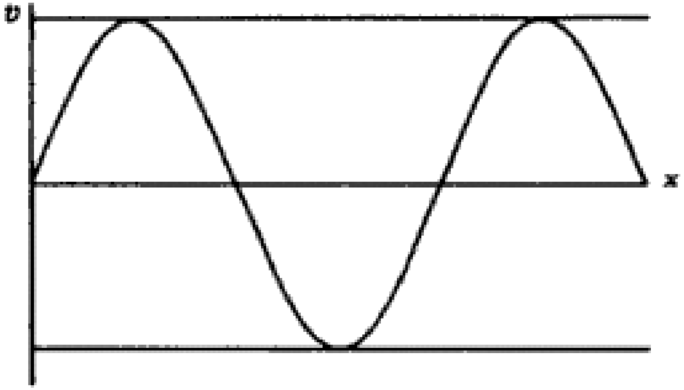


Comportamento do erro em métodos de relaxação

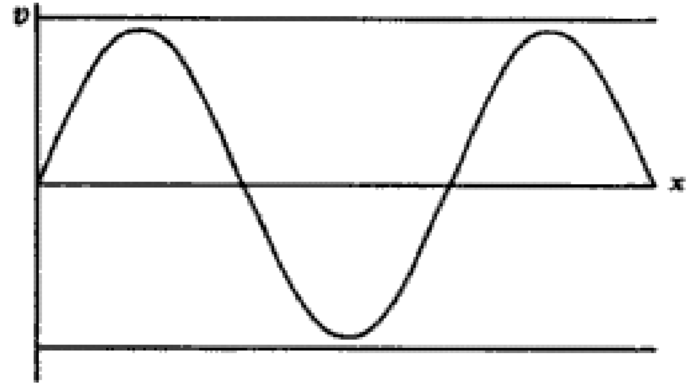


Malha com n = 12 divisões

Comportamento do erro em métodos de relaxação



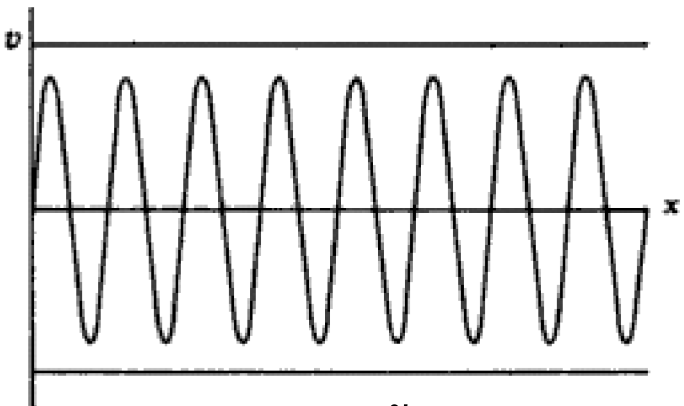
1 Iteração



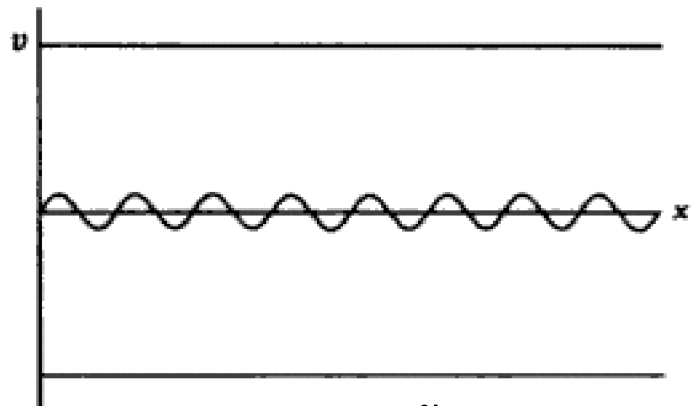
10 Iterações

k = 3

Malha com
n = 64 divisões



1 Iteração



10 Iterações

k=16