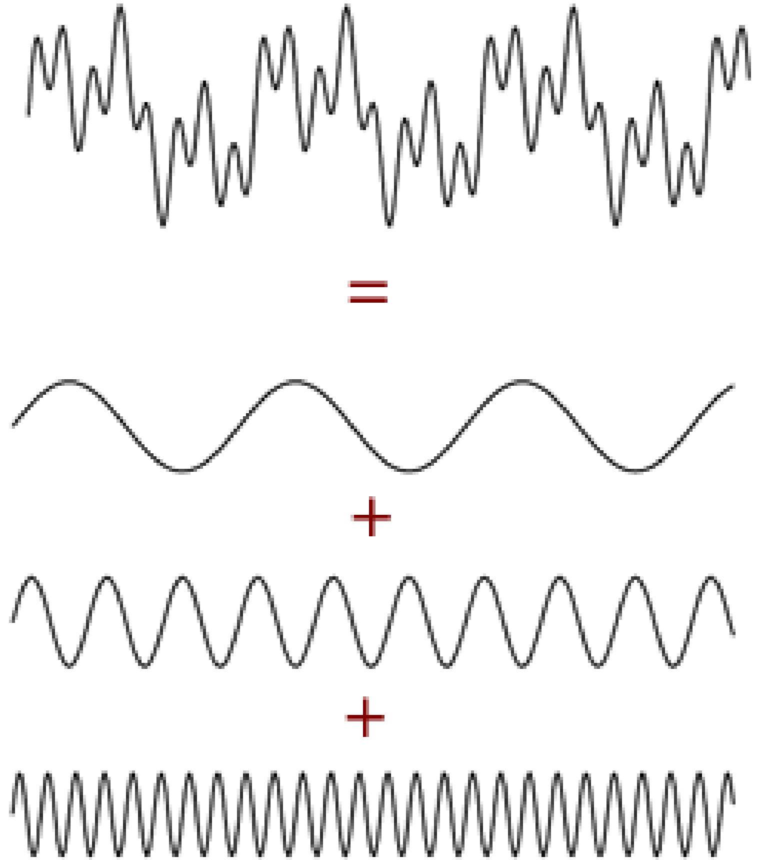


Transformada rápida de Fourier

André Chalom

chalom@ime.usp.br
Curso de Ciências Moleculares
Universidade de São Paulo

Joseph Fourier

- Trabalho propondo a decomposição de funções arbitrárias em séries de senos e cossenos

Joseph Fourier

- “Deixa a desejar na generalidade e no rigor”

Análise de Fourier

Seja f(x) R $\rightarrow$ R, de período 2π. Então:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Análise de Fourier

Seja f(x) R $\rightarrow$ R, de período 2π. Então:

Enésima raiz da
unidade!!

$$z = e^{2\pi i/n}$$

Transformada de Fourier

- No caso contínuo:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\ e^{i2\pi\nu t}\, d\nu,$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-i2\pi\nu t}\, dt,$$

Transformada de Fourier

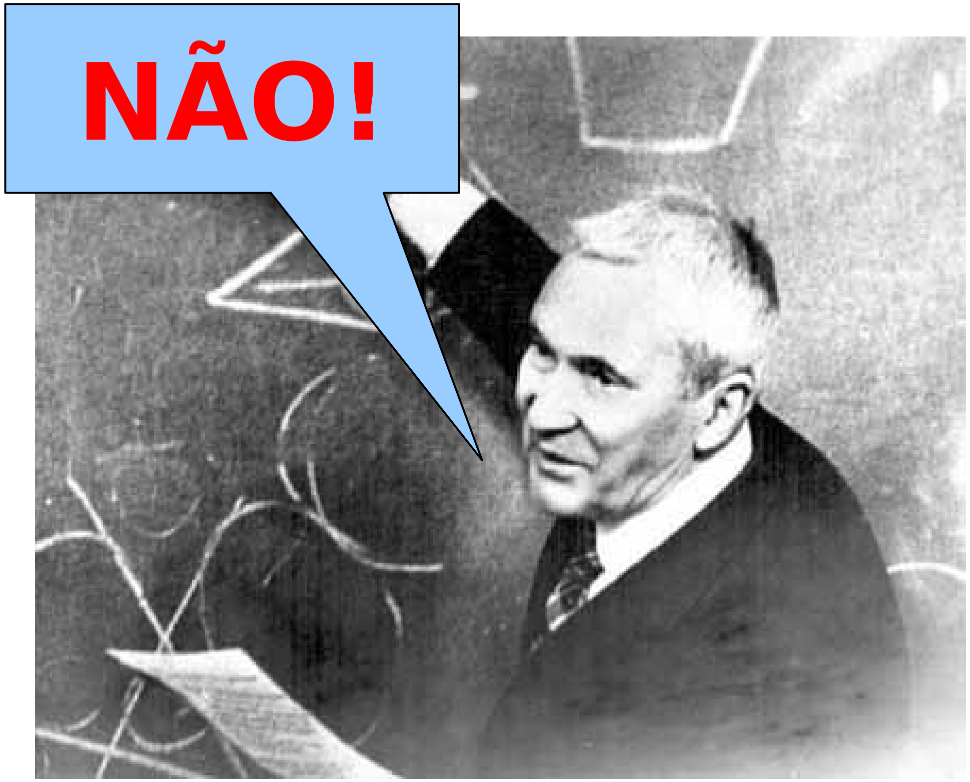
- No caso contínuo:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu,$$ Direta

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt,$$ Inversa

Mas converge sempre?

Mas converge sempre?



- Kolmogorov: uma função integrável para a qual a série de Fourier diverge *em todos os pontos (1922)*
- *f(x) deve ter o quadrado integrável!*

Como calcular?

Caso discreto

- Tabela de valores

j	X	Y
0	-3,1416	-3,1416
1	-2,3562	-2,3562
2	-1,5708	-1,5708
3	-0,7854	-0,7854
4	0,0000	0,0000
5	0,7854	0,7854
6	1,5708	1,5708
7	2,3562	2,3562

$$F(x) = \tfrac{1}{4}\,\Sigma c_k e^{ikx}$$

$$c_k = \sum_{j=0}^{7} y_j e^{ik\pi j/4}$$

Força bruta!

$$c_k = \sum_{j=0}^{7} y_j e^{ik\pi j/4}$$

$$c0 = y0 + y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6 + y7$$
$$c1 = y0 + \alpha y1 + iy2 + \beta y3 - y4 - \alpha y5 - iy6 - \beta y7$$
$$c2 = y0 + iy1 - y2 - iy3 + y4 + iy5 - y6 - iy7$$
$$c3 = y0 + \beta y1 - iy2 + \alpha y3 - y4 - \beta y5 + iy6 - \alpha y7$$
$$c4 = y0 - y1 + y2 - y3 + y4 - y5 + y6 - y7$$
$$c5 = y0 - \alpha y1 + iy2 - \beta y3 - y4 + \alpha y5 - iy6 + \beta y7$$
$$c6 = y0 - iy1 - y2 + iy3 + y4 - iy5 - y6 + y7$$
$$c7 = y0 - \beta y1 - iy2 - \alpha y3 - y4 + \beta y5 + iy6 + \alpha y7$$

$$\alpha = e^{i\pi/4} \quad \beta = e^{3i\pi/4}$$

Força bruta!

$O(N^2)$

Fast Fourier Transform

- Proposto por Cooley e Tukey (foto) em 1965
- Idéia: quebrar o domínio em fragmentos menores
- O(N logN)

Fast Fourier Transform

Vamos voltar alguns slides

$$c0 = y0 + y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6 + y7$$
$$c1 = y0 + \alpha y1 + iy2 + \beta y3 - y4 - \alpha y5 - iy6 - \beta y7$$
$$c2 = y0 + iy1 - y2 - iy3 + y4 + iy5 - y6 - iy7$$
$$c3 = y0 + \beta y1 - iy2 + \alpha y3 - y4 - \beta y5 + iy6 - \alpha y7$$
$$c4 = y0 - y1 + y2 - y3 + y4 - y5 + y6 - y7$$
$$c5 = y0 - \alpha y1 + iy2 - \beta y3 - y4 + \alpha y5 - iy6 + \beta y7$$
$$c6 = y0 - iy1 - y2 + iy3 + y4 - iy5 - y6 + y7$$
$$c7 = y0 - \beta y1 - iy2 - \alpha y3 - y4 + \beta y5 + iy6 + \alpha y7$$

Vamos voltar alguns slides

$$c0 = \boxed{y0} + y1 + \boxed{y2} + y3 + \boxed{y4} + y5 + \boxed{y6} + y7$$
$$c1 = y0 + \alpha y1 + iy2 + \beta y3 - y4 - \alpha y5 - iy6 - \beta y7$$
$$c2 = y0 + iy1 - y2 - iy3 + y4 + iy5 - y6 - iy7$$
$$c3 = y0 + \beta y1 - iy2 + \alpha y3 - y4 - \beta y5 + iy6 - \alpha y7$$
$$c4 = \boxed{y0} - y1 + \boxed{y2} - y3 + \boxed{y4} - y5 + \boxed{y6} - y7$$
$$c5 = y0 - \alpha y1 + iy2 - \beta y3 - y4 + \alpha y5 - iy6 + \beta y7$$
$$c6 = y0 - iy1 - y2 + iy3 + y4 - iy5 - y6 + y7$$
$$c7 = y0 - \beta y1 - iy2 - \alpha y3 - y4 + \beta y5 + iy6 + \alpha y7$$

Definindo novas constantes

$c_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$
$c_4 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7$

$d_0 = y_0 + y_2 + y_4 + y_6$
$d_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7$

$c_0 = d_0 + d_1$
$c_4 = d_0 - d_1$

Definindo novas constantes

$c0 = y0 + y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6 + y7$

$c4 = y0 - y1 + y2 - y3 + y4 - y5 + y6 - y7$

30 operações

$d0 = y0 + y2 + y4 + y6$

$d1 = y1 + y3 + y5 + y7$

$c0 = d0 + d1$

$c4 = d0 - d1$

16 operações

Mas que sorte!

$d0 = \boxed{y0} + y2 + \boxed{y4} + y6$

$d1 = y1 + y3 + y5 + y7$

$d2 = y0 + iy2 - y4 - iy6$

$d3 = \alpha(y1 + iy3 - y5 - iy7)$

$d4 = \boxed{y0} - y2 + \boxed{y4} - y6$

$d5 = i(y1 - y3 + y5 - y7)$

$d6 = y0 - iy2 - y4 + iy6$

$d7 = \beta(y1 - iy3 - y5 + iy7)$

Mas que sorte!

$$d0 = \boxed{y0} + y2 + \boxed{y4} + y6$$

$$d1 = y1 + y3 + y5 + y7$$

$$d2 = y0 + iy2 - y4 - iy6$$

$$d3 = \alpha(y1 + iy3 - y5 - iy7)$$

$$d4 = \boxed{y0} - y2 + \boxed{y4} - y6$$

$$d5 = i(y1 - y3 + y5 - y7)$$

$$d6 = y0 - iy2 - y4 + iy6$$

$$d7 = \beta(y1 - iy3 - y5 + iy7)$$

etc!

Comparação

- Força bruta:
  - 8 pontos em
  120 operações
  - 1024 pontos em
  4.2 milhões de operações

- FFT:
  - 8 pontos em
  48 operações
  - 1024 pontos em
  13 mil operações

Raiz - 4

$$c0 = y0 + y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6 + y7$$
$$c1 = y0 + \alpha y1 + iy2 + \beta y3 - y4 - \alpha y5 - iy6 - \beta y7$$
$$c2 = y0 + iy1 - y2 - iy3 + y4 + iy5 - y6 - iy7$$
$$c3 = y0 + \beta y1 - iy2 + \alpha y3 - y4 - \beta y5 + iy6 - \alpha y7$$
$$c4 = y0 - y1 + y2 - y3 + y4 - y5 + y6 - y7$$
$$c5 = y0 - \alpha y1 + iy2 - \beta y3 - y4 + \alpha y5 - iy6 + \beta y7$$
$$c6 = y0 - iy1 - y2 + iy3 + y4 - iy5 - y6 + y7$$
$$c7 = y0 - \beta y1 - iy2 - \alpha y3 - y4 + \beta y5 + iy6 + \alpha y7$$

Raiz - 4

$$c0 = \boxed{y0} + y1 + y2 + y3 + \boxed{y4} + y5 + y6 + y7$$

$$c1 = y0 + \alpha y1 + iy2 + \beta y3 - y4 - \alpha y5 - iy6 - \beta y7$$

$$c2 = \boxed{y0} + iy1 - y2 - iy3 + \boxed{y4} + iy5 - y6 - iy7$$

$$c3 = y0 + \beta y1 - iy2 + \alpha y3 - y4 - \beta y5 + iy6 - \alpha y7$$

$$c4 = \boxed{y0} - y1 + y2 - y3 + \boxed{y4} - y5 + y6 - y7$$

$$c5 = y0 - \alpha y1 + iy2 - \beta y3 - y4 + \alpha y5 - iy6 + \beta y7$$

$$c6 = \boxed{y0} - iy1 - y2 + iy3 + \boxed{y4} - iy5 - y6 + y7$$

$$c7 = y0 - \beta y1 - iy2 - \alpha y3 - y4 + \beta y5 + iy6 + \alpha y7$$

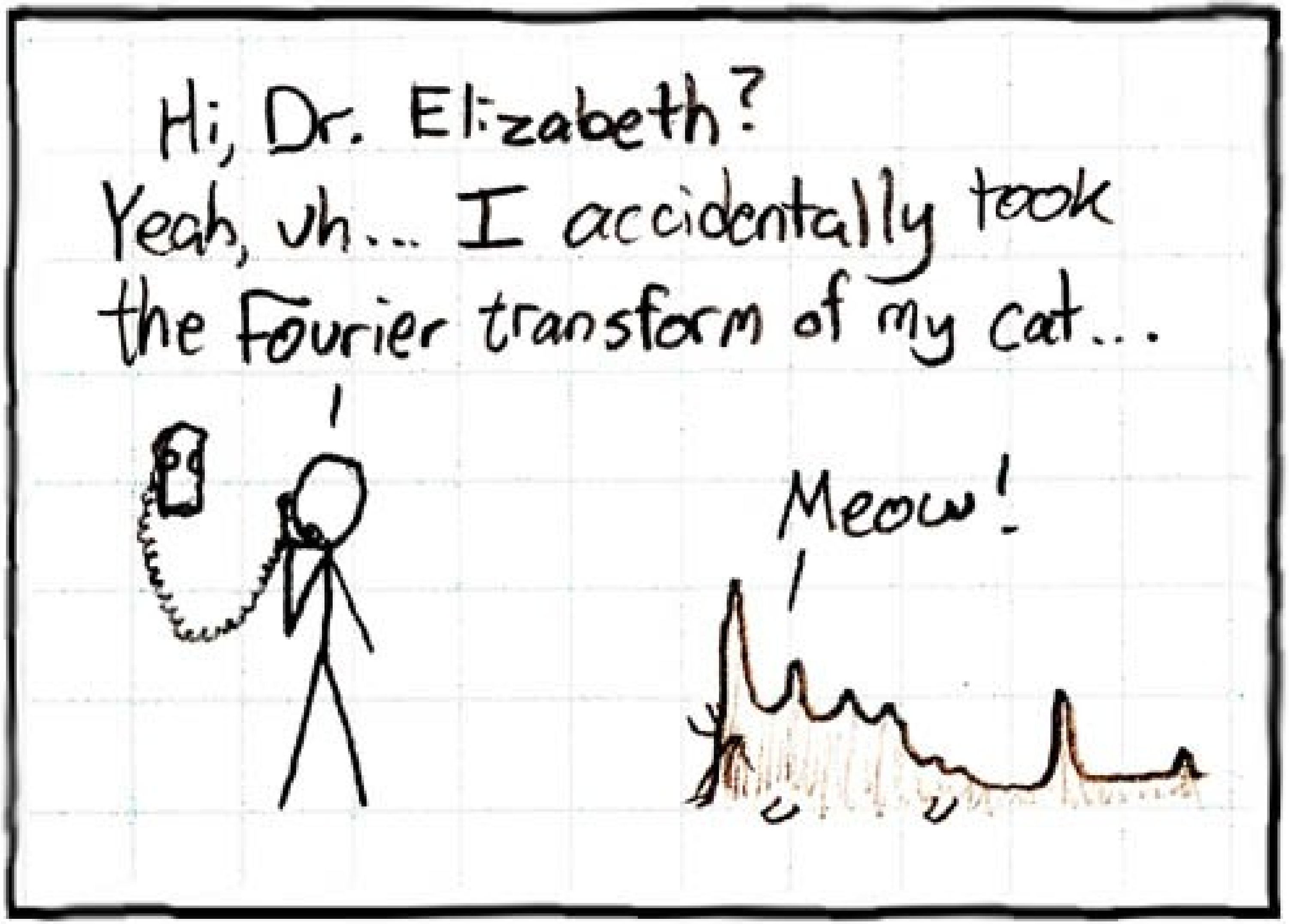
Raiz - 4

$$c0 = y0 + y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6 + y7$$
$$c1 = y0 + \alpha y1 + iy2 + \beta y3 - y4 - \alpha y5 - iy6 - \beta y7$$
$$c2 = y0 + iy1 - y2 - iy3 + y4 + iy5 - y6 - iy7$$
$$c3 = y0 + \beta y1 - iy2 + \alpha y3 - y4 - \beta y5 + iy6 - \alpha y7$$
$$c4 = y0 - y1 + y2 - y3 + y4 - y5 + y6 - y7$$
$$c5 = y0 - \alpha y1 + iy2 - \beta y3 - y4 + \alpha y5 - iy6 + \beta y7$$
$$c6 = y0 - iy1 - y2 + iy3 + y4 - iy5 - y6 + y7$$
$$c7 = y0 - \beta y1 - iy2 - \alpha y3 - y4 + \beta y5 + iy6 + \alpha y7$$

Mais métodos!

- Cooley-Tukey: $N \Rightarrow N_1N_2$
- Split-Radix (Duhamel-Hollman): $N \Rightarrow N/2 + 2*N/4$
- Bruun: fatoração de $z^N - 1$
- Winograd: sem multiplicações (obsoleto?)
- Métodos de FFT real

- Precisão de ponto flutuante: ($\varepsilon \log N$)
- Edelman: Multipolo $\rightarrow$ FFT aproximada (paralela)


Hi, Dr. Elizabeth?
Yeah, uh... I accidentally took the Fourier transform of my cat...
Meow!

Obrigado!

Referência

- Burden, R.L.; Faires, J.D. **Numerical Analysis**, 6th ed. Brooks Cole ed.